Caractères tordus des représentations admissibles

Bertrand Lemaire

CARACTÈRES TORDUS DES REPRÉSENTATIONS ADMISSIBLES

Bertrand Lemaire

Résumé. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique quelconque, $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F, θ un F–automorphisme de $\mathbf{G}$, et ω un caractère de $\mathbf{G}(F)$. On fixe une mesure de Haar dg sur $\mathbf{G}(F)$. Si π est une représentation complexe lisse irréductible (θ,ω)–stable de $\mathbf{G}(F)$, c'est–à–dire telle que $\pi\circ\theta \simeq \pi\otimes\omega$, le choix d'un isomorphisme A de $\pi\otimes\omega$ sur $\pi\circ\theta$ définit une distribution Θ_π^A sur $\mathbf{G}(F)$, appelée « caractère (A–)tordu de π » : pour toute fonction f sur $\mathbf{G}(F)$, localement constante et à support compact, on pose $\Theta_\pi^A(f) = \mathrm{trace}(\pi(fdg)\circ A)$. Dans cet article, on étudie ces distributions Θ_π^A, sans hypothèse restrictive sur F, $\mathbf{G}$ ou θ. On prouve en particulier que la restriction de Θ_π^A à l'ouvert dense de $\mathbf{G}(F)$ formé des éléments θ–quasi–réguliers est donnée par une fonction localement constante, et l'on décrit le comportement de cette fonction par rapport à l'induction parabolique et à la restriction de Jacquet. Cela nous amène à reprendre la théorie de Steinberg sur les automorphismes d'un groupe algébrique, d'un point de vue rationnel.

Abstract. — Let F be a non–Archimedean locally compact field ($\mathrm{car}(F)\geq 0$), $\mathbf{G}$ be a connected reductive group defined over F, θ be an F–automorphism of $\mathbf{G}$, and ω be a character of $\mathbf{G}(F)$. We fix a Haar measure dg on $\mathbf{G}(F)$. For a smooth irreducible (θ,ω)–stable complex representation π of $\mathbf{G}(F)$, that is such that $\pi\circ\theta\simeq\pi\otimes\omega$, the choice of an isomorphism A from $\pi\otimes\omega$ to $\pi\circ\theta$ defines a distribution Θ_π^A, called the « (A–)twisted character of π » : for a compactly supported locally constant function f on $\mathbf{G}(F)$, we put $\Theta_\pi^A(f) = \mathrm{trace}(\pi(fdg)\circ A)$. In this paper, we study these distributions Θ_π^A, without any restrictive hypothesis on F, $\mathbf{G}$ or θ. We prove in particular that the restriction of Θ_π^A on the open dense subset of $\mathbf{G}(F)$ formed of those elements which are θ–quasi–regular is given by a locally constant function, and we describe how this function behaves with respect to parabolic induction and Jacquet restriction. This leads us to take up again the Steinberg theory of automorphisms of an algebraic group, from a rationnal point of view.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22E50.

Mots clefs. — corps local non archimédien, groupe réductif, espace tordu, élément quasi–semi-simple, élément quasi–régulier, représentation admissible, caractère–distribution, fonction caractère, intégrale orbitale, formule d'intégration de Weyl.

Table des matières

1. Introduction 2
2. Caractères tordus d'un groupe localement profini 8
3. Automorphismes d'un groupe réductif connexe 24
4. Questions de rationnalité 50
5. Caractères tordus d'un groupe réductif $\mathfrak{p}$–adique 64
6. Séries discrètes et représentations cuspidales 85
7. Intégrales orbitales et caractères 89
Annexe A. Représentations irréductibles d'un G–espace tordu 99
Annexe B. Représentations l-modulaires 108
Annexe C. Action d'un groupe algébrique et points rationnels 111
Références 124

1. Introduction

1.1. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, et soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. On note $G = \mathbf{G}(F)$ le groupe des points F–rationnels de $\mathbf{G}$. On munit G de la topologie définie par F, ce qui en fait un groupe localement profini. Fixons un F–automorphisme θ de $\mathbf{G}$, un caractère ω de $\mathbf{G}(F)$, et une mesure de Haar dg sur G. Si π est un représentation (complexe, lisse) admissible (θ,ω)*–stable* de G, c'est–à–dire telle que $\pi^\theta \simeq \omega\pi$ où l'on a posé $\pi^\theta = \pi\circ\theta$ et $\omega\pi = \pi\otimes\omega$, alors le choix d'un isomorphisme A de $\omega\pi$ sur π^θ définit une distribution Θ_π^A sur G, appelée « caractère (A)–tordu de π » : pour toute fonction f sur G, localement constante et à support compact, on pose

$$\Theta_\pi^A(f) = \mathrm{trace}(\pi(f)\circ A),$$

où $\pi(f) = \pi(fdg)$ désigne l'opérateur $\int_G f(g)\pi(g)dg$ sur l'espace de π. Puisque π est admissible, l'opérateur $\pi(f)\circ A$ et de rang fini, et la distribution Θ_π^A sur G est bien définie. Pour $x\in G$, elle vérifie la relation

$$\Theta_\pi^A({}^{x,\theta}f) = \omega(x)^{-1}\Theta_\pi^A(f),$$

où l'on a posé ${}^{x,\theta}f(g) = f(x^{-1}g\theta(x))$, $g\in G$.

1.2. — Dans cet article, on étudie les principales propriétés des caractères tordus de G (voir 1.10 pour une description détaillée), sans hypothèse particulière sur F, $\mathbf{G}$ ou θ. Ces propriétés sont souvent déjà connues, mais ne sont en général démontrées que dans le cas non tordu, c'est–à–dire pour $(\theta,\omega) = (\mathrm{id},1)$. D'autre part, dans le cas tordu, elles sont souvent énoncées sous des hypothèses restrictives : $\mathrm{car}(F) = 0$; $\omega = 1$; θ d'ordre fini ; θ quasi–semisimple ; $G = \mathrm{GL}_n(F)$; etc — citons en particulier l'article de Clozel **[Cl1]**, dans lequel toutes ces hypothèses sont vérifiées. On donne ici des démonstrations complètes dans le cas tordu, valables pour F, $\mathbf{G}$ et θ quelconques.

Signalons qu'une version légèrement différente de cet article est présente sur arXiv depuis le 21 juillet 2010 (arXiv : 1007.3576v1 [math.RT]). Elle a déjà été utilsée par W.–W. Li **[Li]** et par J.–L. Waldspurger **[W]**.

1.3. — Ces deux types de torsion — l'une donnée par l'automorphisme θ et l'autre par le caractère ω — apparaissent dans de nombreuses applications du principe de fonctorialité de Langlands ; déjà dans les premiers exemples, comme le changement de base cyclique ou la restriction des représentations à $\mathbf{G}_{\mathrm{der}}(F)$, on est amenés à considérer des caractères tordus. La théorie de l'endoscopie tordue étudie précisément les distributions D sur G vérifiant

$$D({}^{x,\theta}f) = \omega(x)^{-1}D(f) \tag{$*$}$$

pour toute fonction f sur G, localement constante et à support compact, et tout $x \in G$. Cette théorie permet en particulier de comparer les représentations irréductibles de G avec celles d'autres groupes H qui lui sont associés — ceux faisant partie d'une donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ de (G, θ, ω), cf. [**KS**]. Dans les cas particuliers où elles ont été établies (e.g. le changement de base et l'induction automorphe pour GL_n), ces correspondances entre représentations s'expriment par des identités de caractères reliant les caractères tordus de G à des sommes pondérées de caractères de H. Ces identités de caractères sont le plus souvent obtenues dualement à partir d'identités reliant, côté géométrique, les intégrales orbitales endoscopiques de G — qui sont des sommes d'intégrales orbitales (θ, ω)-tordues (voir plus loin, 7.1) pondérées par des facteurs de transfert — à des intégrales orbitales stables de H : c'est la *conjecture de transfert*.

1.4. — L'analyse harmonique en caractéristique non nulle est souvent plus compliquée qu'en caractéristique nulle, raison pour laquelle certains résultats d'Harish–Chandra — comme par exemple l'*intégrabilité locale des caractères* [**HC2**] — sont encore aujourd'hui valables en toute généralité seulement en caractéristique nulle (même dans le cas non tordu). La plupart des difficultés nouvelles sont liées à des questions d'inséparabilité qui ne se posent pas en caractéristique nulle, ou en caractéristique résiduelle « suffisamment grande ». Certains estiment qu'il est aujourd'hui trop tôt pour aborder ces questions. On pense en revanche qu'il est important, lorsque c'est possible, de disposer d'énoncés vrais en toute caractéristique. Par ailleurs, depuis la démonstration récente du lemme fondamental par Ngô et Waldspurger, l'analyse harmonique en caractéristique non nulle semble connaître un regain d'intérêt.

Le caractère tordu Θ_π^A est une fonction localement constante sur un certain ouvert dense de G ; c'est l'une des principales propriétés établies dans cet article. En caractéristique nulle, Clozel [**Cl2**] a démontré, pour θ d'ordre fini et $\omega = 1$, que cette fonction est localement intégrable sur G, généralisant ainsi le résultat d'Harish–Chandra déjà cité [**HC2**]. Si F est de caractéristique non nulle, cela n'est connu que dans quelques cas particuliers [**Le1, Le2**]. Si la caractéristique de F est suffisamment grande (par rapport au rang du groupe), il est vraisemblable qu'avec des modifications mineures la méthode d'Harish–Chandra [**HC2, Cl2**] s'applique encore ; cela mériterait d'ailleurs d'être rédigé.

Le résultat dual, qui exprime les intégrales orbitales tordues en termes des caractères — et des variantes de ceux-ci, les *caractères pondérés* —, est une conséquence de la *formule des traces locale*, établie par Arthur [**A**] pour F de caractéristique nulle, $\theta = \mathrm{id}$ et $\omega = 1$. Pour F de caractéristique nulle, la *formule des traces locale tordue* a récemment été établie par Waldspurger [**W**]. Pour F de caractéristique non nulle, l'affaire est loin d'être réglée !

1.5. — Pour étudier les distributions sur G vérifiant la relation $(*)$ de 1.3, il est assez commode d'introduire l'espace tordu $\mathbf{G}^\natural = \mathbf{G}\theta$ de Labesse. C'est une variété algébrique affine définie sur F, munie d'un isomorphisme de variétés algébriques $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}^\natural$, $g \mapsto g\theta$ lui aussi défini sur F, et d'actions algébriques de $\mathbf{G}$ à gauche et à droite, commutant entre elles et vérifiant l'égalité $g \cdot g'\theta \cdot g'' = gg'\theta(g'')\theta$ pour tous g, g', $g'' \in \mathbf{G}$. Pour $g \in \mathbf{G}$, on note $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(g\theta)$ l'automorphisme (algébrique) $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(g) \circ \theta$ de $\mathbf{G}$. On note $G^\natural = G\theta$ l'ensemble des points F–rationnels de $\mathbf{G}^\natural$, que l'on peut voir comme un G–espace (topologique) tordu. Pour $\gamma \in G^\natural$, l'automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(\gamma)$ de $\mathbf{G}$ est défini sur F, et induit un automorphisme du groupe topologique G, que l'on note $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$. Pour $g \in G$ et $\gamma \in G^\natural$, posant $\tau = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$, on a

$$g^{-1} \cdot \gamma \cdot g = g^{-1}\tau(g) \cdot \gamma.$$

En fait, la donnée de l'automorphisme θ n'est pas vraiment indispensable : il correspond au choix d'un point–base δ_1 de $\mathbf{G}^\natural(F)$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(\delta_1) = \theta$. La théorie des groupes algébriques s'étend naturellement à celle des $\mathbf{G}$–espaces tordus. Par exemple, on appelle *sous–espace parabolique* de $G^\natural$ un sous–espace topologique $P^\natural$ de $G^\natural$ de la forme $P^\natural = P \cdot \gamma$ pour un sous–groupe parabolique P de G et un élément γ de $G^\natural$ tels que $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)(P) = P$.

Notons que les distributions D sur G vérifiant la condition $(*)$ de 1.3 correspondent aux distributions $\mathcal{D}$ sur $G^\natural$ vérifiant

$$(**) \qquad \mathcal{D}({}^x\phi) = \omega(x)^{-1}\mathcal{D}(\phi)$$

pour tout fonction ϕ sur $G^\natural$, localement constante et à support compact, et tout $x \in G$; où l'on a posé ${}^x\phi(\delta) = \phi(x^{-1} \cdot \delta \cdot x)$, $\delta \in G^\natural$.

1.6. — On appelle *ω–représentation lisse de $G^\natural$* la donnée d'une représentation lisse (π, V) de G et d'une application $\Pi : G^\natural \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ vérifiant

$$\Pi(x \cdot \gamma \cdot y) = \omega(y)\pi(x) \circ \Pi(\gamma) \circ \pi(y)$$

pour tout $\gamma \in G^\natural$ et tous x, $y \in G$. La représentation π étant déterminée par l'application Π, on la note aussi Π°. La donnée d'une ω–représentation lisse Π de $G^\natural$ équivaut à celle d'une représentation lisse (θ, ω)–stable π de G munie d'un isomorphisme A de $\omega\pi$ sur π^θ : on pose $\pi = \Pi^\circ$ et $A = \Pi(\delta_1)$. Si de plus π est admissible, auquel cas on dit que Π est admissible, alors le choix d'une mesure de Haar $d\gamma$ sur $G^\natural$ (cf. 2.5) définit une distribution Θ_Π sur $G^\natural$, appelée *caractère de* Π : pour toute fonction ϕ sur $G^\natural$, localement constante et à support compact, on pose

$$\Theta_\Pi(\phi) = \mathrm{trace}(\Pi(\phi)),$$

où $\Pi(\phi)$ désigne l'opérateur $\int_{G^\natural} \phi(\gamma)\Pi(\gamma)d\gamma$ sur l'espace de Π. Si $d\gamma$ est l'image de la mesure dg par l'homéomorphisme $G \to G^\natural$, $g \mapsto g \cdot \delta_1$, alors pour toute fonction f sur G, localement constante et à support compact, notant $f^\natural$ la fonction $g \cdot \delta_1 \mapsto f(g)$ sur $G^\natural$, on a $\Pi(f^\natural) = \pi(f) \circ A$, d'où

$$\Theta_\Pi(f^\natural) = \Theta_\pi^A(f).$$

1.7. — Pour tout sous–groupe fermé H de G, on note $\mathfrak{h}$ (même lettre gothique) son algèbre de Lie. Un élément γ de $G^\natural$ est dit *quasi–régulier* si pour tout sous–groupe parabolique P de G, on a l'égalité

$$\mathfrak{g}(1-\gamma) + \mathfrak{p} = \mathfrak{g},$$

où l'on a posé $\mathfrak{g}(1-\gamma) = \{X - \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)(X) : X \in \mathfrak{g}\}$, $\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma))$. Les éléments quasi–réguliers forment un ensemble ouvert dense, disons $G^\natural_{\mathrm{qr}}$, dans $G^\natural$. La notion d'élément quasi–régulier généralise celle, plus classique, d'élément *(semisimple) régulier* : les éléments réguliers de $G^\natural$ sont par définition ceux qui n'annulent pas une certaine fonction régulière $D_{\mathbf{G}^\natural}$ sur $\mathbf{G}^\natural$, définie comme le discriminant d'Harish–Chandra $D_{\mathbf{G}}$ sur $\mathbf{G}$ (rappelons que pour $g \in G$, on a $D_{\mathbf{G}}(g) \neq 0$ si et seulement si g est semisimple régulier). Les éléments réguliers forment un ensemble ouvert dense, disons $G^\natural_{\mathrm{reg}}$, dans $G^\natural$, qui est contenu dans $G^\natural_{\mathrm{qr}}$. Pour $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{reg}}$, la G–orbite $\mathcal{O}_G(\gamma) = \{g^{-1} \cdot \gamma \cdot g : g \in G\}$ est fermée dans $G^\natural$, et la composante connexe $\mathbf{G}_\gamma^\circ$ du centralisateur $\mathbf{G}_\gamma = \{g \in \mathbf{G} : g^{-1} \cdot \gamma \cdot g = \gamma\}$ de γ dans $\mathbf{G}$ est un tore défini sur

F. Le choix d'une mesure de Haar dg_γ sur le groupe des points F–rationnels $G_\gamma^\circ = \mathbf{G}_\gamma^\circ(F)$ de ce tore, définit une distribution $\Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma)$ sur $G^\natural$ — appelée *ω–intégrale orbitale*, ou *intégrale orbitale ω–tordue* de γ : pour toute fonction ϕ sur $G^\natural$, localement constante et à support compact, on pose

$$\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma) = \int_{G_\gamma^\circ\backslash G} \omega(g)\phi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot g)\frac{dg}{dg_\gamma}.$$

Puisque la G–orbite $\mathcal{O}_G(\gamma)$ est fermée dans $G^\natural$, l'intégrale est absolument convergente, et la distribution $\Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma)$ est bien définie.

1.8. — Les caractères tordus Θ_Π et les intégrales orbitales tordues $\Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma)$ définis dans les numéros précédents sont les deux familles principales de distributions $\mathcal{D}$ sur $G^\natural$ vérifiant la condition $(**)$ de 1.5. On prouve dans cet article que pour toute ω–représentation admissible Π de $G^\natural$ telle que la représentation sous–jacente Π° de G est de type fini (c'est–à–dire de longueur finie, puisqu'elle est admissible), la restriction de Θ_Π à G_{qr} est donnée par une fonction localement constante, que l'on note encore Θ_Π. En d'autres termes, pour toute fonction ϕ sur $G^\natural$, localement constante et à support compact *contenu dans* G_{qr}, on a l'égalité

$$\Theta_\Pi(\phi) = \int_G \phi(\delta)\Theta_\Pi(\delta)d\delta;$$

l'intégrale est absolument convergente (d'ailleurs c'est même une somme finie). La formule d'intégration de H. Weyl permet alors de développer l'intégrale ci–dessus en termes des intégrales orbitales tordues $\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma)$, $\gamma\in G^\natural_{\mathrm{reg}}$. On subodore bien sûr que l'égalité ci–dessus reste vraie même si le support de ϕ n'est pas contenu dans G_{qr} — c'est la propriété d'intégrabilité locale des caractères, cf. 1.4 — mais cette question n'est pas abordée dans le présent article.

1.9. — On l'a dit plus haut, le groupe $G=\mathbf{G}(F)$ muni de la topologie définie par F, est localement profini. Mais comme groupe des points F–rationnels de $\mathbf{G}$, il hérite aussi de la structure du groupe algébrique $\mathbf{G}$. La division de l'article en six chapitres (voir plus haut la table des matières) est en grande partie commandée par ce double point de vue : groupe topologique – groupe algébrique.

Les propriétés valables pour n'importe quel groupe topologique localement profini G et n'importe quel automorphisme (topologique) θ de G, sont regroupées dans le ch. 1. Dans les ch. 2 et 3, qui sont indépendants du reste de l'article, on reprend (1) la théorie de Steinberg sur les automorphismes quasi–semisimples de $\mathbf{G}$, d'un point de vue rationnel. Dans les ch. 4, 5 et 6, on applique les résultats établis dans les deux premiers chapitres à l'étude des caractères tordus de $G=\mathbf{G}(F)$.

L'article se conclut par trois annexes (cf. 1.11 pour une description de leur contenu). La troisième (C) est à l'origine du laps de temps séparant ce texte de la version parue sur ArXiv en juillet 2010 (cf. 1.2), une assertion dans ladite version n'étant pas démontrée : la G–orbite $\mathcal{O}_G(\delta)$ d'un élément quasi–semisimple δ de G est fermée dans G pour la topologie définie par F. Pour démontrer ce résultat, il faut comprendre certains phénomènes d'inséparabilité (2)

1. Nous ne pensions pas au départ devoir reprendre en détail cette théorie, mais cela nous a vite semblé indispensable, pour que nos résultats soient valables en toute caractéristique (l'analyse harmonique en caractéristique non nulle est encore un terrain miné !).

2. La $\mathbf{G}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(\delta)$ de δ est fermée dans $\mathbf{G}^\natural$ pour la topologie de Zariski, mais l'application $\mathbf{G}\rightarrow\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(\delta)$, $g\mapsto g^{-1}\cdot\delta\cdot g$ peut ne pas être séparable. En revanche si s est un élément semisimple de $\mathbf{G}$, l'application $\mathbf{G}\rightarrow\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(s)$, $g\mapsto g^{-1}sg$ est toujours séparable.

qui n'existent pas dans le cas non tordu (ou si F est de caractéristique nulle). Nous avons pour cela repris les techniques de Bernstein–Zelevinski traitant des morphismes inséparables [**BZ**, Appendix]. Entre–temps, nous nous sommes aperçus que Moret–Bailly avait récemment démontré dans un cadre plus général [3] le résultat qui nous manquait [**MB2**, theorem 1.3] — cf. la démonstration de la proposition 1 de 4.9. Comme l'approche de Bernstein–Zelevinski conduit dans le cas très particulier qui nous intéresse à un résultat explicite qui pourra nous servir dans un travail ultérieur, nous avons décidé de la conserver, tout en utilisant le résultat de Moret–Bailly.

1.10. — Décrivons brièvement le contenu des chapitres.

Dans le ch. 1, on définit les caractères (θ, ω)–tordus d'un groupe localement profini quelconque G, où θ et ω sont respectivement un automorphisme et un caractère de G. On introduit l'espace (topologique) tordu $G^\natural = G\theta$, qui permet de « voir » les caractères tordus de G comme des caractères de $G^\natural$. Enfin on établit une formule de descente pour les caractères des ω–représentations admissibles de $G^\natural$ qui sont induites à partir d'un sous–espace tordu $H^\natural$ de $G^\natural$ tel que G soit compact modulo H. Il s'agit d'un analogue tordu de la formule bien connue de Van Dijk [**VD**], pour les caractères–distributions.

Dans le ch. 2, on rappelle, pour un groupe réductif connexe $\mathbf{H}$ et un $\overline{F}$–automorphisme *quasi–semisimple* τ de $\mathbf{H}$, les principaux résultats de la théorie de Steinberg [**St, DM1**] : description du groupe des points fixes $\mathbf{H}_\tau$, du groupe quotient $\mathbf{H}_\tau/\mathbf{H}_\tau^\circ$, etc. Pour τ quelconque, on introduit la notion d'*élément régulier* de l'espace tordu $\mathbf{H}^\natural = \mathbf{H}\tau$, qui généralise celle d'élément semisimple régulier de $\mathbf{H}$ (pour $h \in \mathbf{H}$, l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$ est régulier si et seulement si h est semisimple régulier). Les éléments réguliers de $\mathbf{H}^\natural$ forment un ensemble ouvert dense dans $\mathbf{H}^\natural$, que l'on note $\mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$. On montre qu'un élément δ de $\mathbf{H}^\natural$ est régulier si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées (théorème de 3.11) :

– le $\overline{F}$-automorphisme $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$ est quasi–semisimple,
– le centralisateur connexe $\mathbf{H}_\delta^\circ = \mathbf{H}_{\tau'}^\circ$ de δ dans $\mathbf{H}$ est un tore.

En ce cas, en posant $\mathbf{S} = \mathbf{H}_\delta^\circ$, le centralisateur $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{H}$ est un tore maximal de $\mathbf{H}$ (cf. le lemme 2 de 3.11). De plus, les ensembles $\mathbf{S}^\natural = \mathbf{S}\cdot\delta$ et $\mathbf{T}^\natural = \mathbf{T}\cdot\delta$ sont des sous–espaces tordus de $\mathbf{H}^\natural$: $\mathbf{S}^\natural$ est un espace tordu trivial, qu'on appelle *tore maximal de* $\mathbf{G}^\natural$, et $\mathbf{T}^\natural$ est appelé *sous–espace de Cartan de* $\mathbf{G}^\natural$. Notons que $\mathbf{S}^\natural$ détermine le *quadruplet de Cartan* $(\mathbf{S}, \mathbf{S}^\natural, \mathbf{T}, \mathbf{T}^\natural)$, et que $\mathbf{T}^\natural$ détermine *le triplet de Cartan* $(\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^\natural)$. Enfin pour tout $\delta' \in \mathbf{T}^\natural \cap \mathbf{G}^\natural_{\mathrm{reg}}$, on a $\mathbf{G}^\circ_{\delta'} = \mathbf{S}$.

Dans le ch. 3, on s'intéresse aux questions de rationalité issues du ch. 2. On montre en particulier que si τ est un F–automorphisme quasi–semisimple de $\mathbf{H}$, alors le groupe $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F, il existe un tore maximal τ–stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$ défini sur F, et un sous–groupe de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$ contenant $\mathbf{T}$ et défini sur une extension séparable finie de F dans $\overline{F}$.

Dans le ch. 4 (et dans les suivants), G est le groupe des points F–rationnels d'un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur F, θ est un F–automorphisme de $\mathbf{G}$, et ω est un caractère de G. On introduit la notion d'élément *quasi–régulier* de l'espace tordu $G^\natural = G\theta$. L'ensemble des éléments quasi–réguliers de $G^\natural$, que l'on note $G^\natural_{\mathrm{qr}}$, est ouvert dense dans $G^\natural$, et contient $G^\natural_{\mathrm{reg}} = G \cap \mathbf{G}^\natural_{\mathrm{reg}}$. On montre que les caractères Θ_Π des ω–représentations admissibles Π de G telles que Π° est de type fini, sont des fonctions localement constantes sur $G^\natural_{\mathrm{qr}}$. Ensuite on décrit comment le foncteur restriction de Jacquet opère sur ces fonctions caractères. La description de l'action du foncteur induction parabolique sur les caractères–distributions

3. Signalons aussi le travail encore plus récent de Gabber, Gille et Moret–Bailly [**GGMB**].

est une simple application de la formule démontrée au ch. 1 ; son action sur les fonctions caractères est décrite au ch. 6.

Dans le ch. 5, on explicite la fonction caractère d'une ω–représentation admissible Π de $G^\natural$ telle que Π° est irréductible et essentiellement de carré intégrable modulo le centre de G, grâce aux calculs effectués dans le ch. 4. On applique ensuite ce résultat au cas où Π° est une représentation irréductible cuspidale de G, induite compacte à partir d'un sous–groupe ouvert, compact modulo le centre, de G.

Dans le ch. 6, on introduit une famille de distributions « duale » de celle des caractères (θ, ω)–tordus : les intégrales orbitales (θ, ω)–tordues. Comme pour les caractères, il est commode de les voir comme des distributions sur $G^\natural$: les *ω–intégrales orbitales.* On écrit la formule de descente parabolique pour les ω–intégrales orbitales, ainsi que la formule d'intégration de Weyl pour les fonctions intégrables sur $G^\natural$. On en déduit la description de l'action du foncteur induction parabolique sur les fonctions caractères.

1.11. — Décrivons maintenant le contenu des annexes.

Dans l'annexe A, on caractérise les ω–représentations lisses irréductibles de $G^\natural$ en termes des foncteurs $V \mapsto V^K$, comme dans [**BZ**]. On prouve aussi l'indépendance linéaires des caractères–distributions Θ_Π pour les ω–représentations admissibles Π de $G^\natural$ telles que Π° est irréductible.

Dans l'annexe B, qui nous a été suggérée par Guy Henniart, on remplace le corps des coefficients $\mathbb{C}$ par un corps R de caractéristique l différente de la caractéristique résiduelle de F. On passe en revue les résultats des ch. 1 et 4 dans ce nouveau cadre. On montre en particulier que, tout comme pour les représentations complexes, le caractère–distribution d'une (ω, R)–représentation admissible $\Pi : G^\natural \to \mathrm{Aut}_R(V)$ telle que Π° est de type fini, est donné sur $G^\natural_{\mathrm{qr}}$ par une fonction localement constante.

Dans l'annexe C, on s'intéresse aux propriétés topologiques — pour la topologie définie par F — de l'application $\alpha_F : \mathbf{Y}(F) \to \mathbf{X}(F)$ déduite par passage aux points F–rationnels d'un F–morphisme $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ de variétés algébriques définies sur F. On sait déjà d'après Bernstein–Zelevinski [**BZ**, theorem A.2] que l'image $\alpha_F(\mathbf{Y}(F))$ est constructible dans $\mathbf{X}(F)$. Récemment, des résultats plus fins ont été obtenus par Moret–Bailly dans un cadre plus général [**MB1, MB2**]. On sait en particulier d'après loc. cit. que si le morphisme α est fini (resp. étale), alors l'application α_F est fermée (resp. un homéomorphisme local). On précise ce résultat dans le cas particulier suivant (proposition de C.11) : *soit* $\mathbf{H}$ *un groupe algébrique affine défini sur* F*, et soit* $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *un* F*–morphisme fini de variétés algébriques affines irréductibles définies sur* F*. On suppose que les variétés* $\mathbf{Y}$ *et* $\mathbf{X}$ *sont munies d'une action algébrique de* $\mathbf{H}$ *définie sur* F*, que* α *est* $\mathbf{H}$*–équivariant et que* $\mathbf{Y}$ *est un* $\mathbf{H}$*–espace homogène. Il existe un* F*–morphisme* $\alpha_1 : \mathbf{Y}_1 \to \mathbf{X}_1$ *de variétés algébriques affines définies sur* F*, et des* F*–morphismes de variétés algébriques* $\gamma : \mathbf{Y}_1 \to \mathbf{Y}$ *et* $\zeta : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}$*, tels que :*

(1) *le morphisme* α_1 *est fini et étale ;*

(2) *l'application* $\gamma_F : \mathbf{Y}_1(F) \to \mathbf{Y}(F)$ *est un homéomorphisme ;*

(3) *l'application* $\zeta_F : \mathbf{X}_1(F) \to \mathbf{X}(F)$ *induit par restriction un homéomorphisme*

$$\alpha_{1,F}(\mathbf{Y}_1(F)) \to \alpha_F(\mathbf{Y}(F));$$

(4) *on a l'égalité* $\alpha_F = \zeta_F \circ \alpha_{1,F} \circ \gamma_F^{-1}$.

En particulier, le morphisme (fermé) $\alpha_F : \mathbf{Y}(F) \to \mathbf{X}(F)$ est un homéomorphisme local sur son image.

1.12. — Dans tout l'article, on utilisera les notations et conventions d'écriture suivantes.

Soit H un groupe topologique. On appelle *automorphisme* de H un morphisme de groupes $H \to H$ qui est un homéomorphisme, et *caractère* de H (à ne pas confondre avec le caractère d'une représentation de H) un morphisme de groupes continu $H \to \mathbb{C}^\times$. On note $\mathrm{Aut}(H)$ le groupe des automorphismes de H, et $\mathrm{Int}(H)$ le sous–groupe distingué de $\mathrm{Aut}(H)$ formé des automorphismes intérieurs, c'est–à–dire ceux de la forme $\mathrm{Int}_H(x) : h \mapsto xhx^{-1}$ pour un $x \in H$. Si χ est un caractère de H, on note χ^{-1} le caractère $h \mapsto \chi(h)^{-1} = \chi(h^{-1})$ de H.

Soit X un *td–espace*, c'est–à–dire un espace topologique séparé tel que chaque point de X possède une base de voisinages ouverts compacts. On note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions complexes sur X qui sont localement constantes et à support compact. Si X est discret (resp. compact), l'espace $C_c^\infty(X)$ est aussi noté $C_c(X)$ (resp. $C^\infty(X)$). Soit K et K' deux groupes topologiques. Si X est muni de deux actions continues

$$K \times X \to X,\ (k,x) \mapsto k \cdot x, \quad X \times K' \to X,\ (x,k') \mapsto x \cdot k'$$

commutant entre elles, on note $C_c^\infty(K\backslash X/K')$ le sous–espace de $C_c^\infty(X)$ formé des fonctions f telles que $f(k \cdot x \cdot k') = f(x)$ pour tout $(k,x,k') \in K \times X \times K'$. Rappelons qu'on appelle *distribution sur* X un élément de l'espace dual $C_c^\infty(X)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C_c^\infty(X), \mathbb{C})$.

Soit G un groupe topologique localement profini. On note $\mathfrak{R}(G)$ la catégorie des représentations complexes lisses de G, et l'on appelle simplement *représentation lisse de* G un objet de $\mathfrak{R}(G)$. Si (π, V) est une représentation lisse de G, pour tout sous–groupe ouvert compact K de G, on note V^K le sous–espace $\{v \in V : \pi(k)(v) = v,\ \forall k \in K\}$ de V. Rappelons qu'une représentation lisse (π, V) de G est dite *admissible* si pour tout sous–groupe ouvert compact K de G, l'espace V^K est de dimension finie.

Je remercie Guy Henniart pour ses nombreuses remarques et suggestions, qui m'ont permis peu à peu d'améliorer ce texte. C'est d'ailleurs lui qui au départ m'a incité à regarder les caractères tordus des représentations admissibles en caractéristique quelconque.

Je remercie vivement le rapporteur pour sa lecture minutieuse et critique du manuscrit, et pour m'avoir signalé un certain nombre d'erreurs vraiment gênantes.

2. Caractères tordus d'un groupe localement profini

Dans ce chapitre, on fixe un groupe localement profini G et une mesure de Haar *à gauche* d_lg sur G.

2.1. Module d'un automorphisme de G. — Soit $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}$ le *module de* G, i.e. le caractère réel de G défini (comme dans [**BZ**, 1.19]) par

$$\int_G f(gx^{-1}) d_lg = \Delta_G(x) \int_G f(g) d_lg \quad (f \in C_c^\infty(G),\ x \in G).$$

En d'autres termes, pour $x \in G$, on a (abus d'écriture) $d_l(gx) = \Delta_G(x) d_lg$.

Soit θ un automorphisme de G. La distribution μ sur G définie par

$$\mu(f) = \int_G f(\theta^{-1}(g)) d_lg \quad (f \in C_c^\infty(G))$$

est encore une mesure de Haar à gauche. Par conséquent il existe une constante $\Delta_G(\theta) \in \mathbb{R}_{>0}$, appelée *module de* θ, telle que

$$\int_G f(\theta^{-1}(g))d_lg = \Delta_G(\theta)\int_G f(g)d_lg \quad (f \in C_c^\infty(G)).$$

En d'autres termes, on a (nouvel abus d'écriture) $d_l(\theta(g)) = \Delta_G(\theta)d_lg$. L'application

$$\Delta_G : \mathrm{Aut}(G) \to \mathbb{R}_{>0}$$

ainsi définie ne dépend pas du choix de la mesure d_lg, et c'est un morphisme de groupes. Notons que pour $x \in G$, on a

$$\Delta_G(x) = \Delta_G(\mathrm{Int}_G(x^{-1})).$$

Lemme. — (1) *On a* $\Delta_G \circ \theta = \Delta_G$.

(2) *S'il existe une partie ouverte compacte θ–stable de G, alors* $\Delta_G(\theta) = 1$.

Démonstration. — Pour $x \in G$, on a

$$\Delta_G(\theta(x)) = \Delta_G(\mathrm{Int}_G(\theta(x)^{-1})) = \Delta_G(\theta \circ \mathrm{Int}_G(x^{-1}) \circ \theta^{-1}).$$

D'où le point (1). Quant au point (2), il résulte de ce que pour toute partie ouverte compacte Ω de G, on a $\mathrm{vol}(\theta(\Omega), d_lg) = \Delta_G(\theta)\mathrm{vol}(\Omega, d_lg)$. □

Soit H un sous–groupe fermé de G. Rappelons que pour toute partie ouverte X de G telle que $HX = X$, les conditions suivantes sont équivalentes :
- l'espace quotient $H\backslash X$ est compact ;
- il existe une partie compacte Ω de G, que l'on peut choisir ouverte compacte, telle que $X = H\Omega$.

Si ces deux conditions sont vérifiées, on dit que X est *compact modulo* H. Bien sûr, on peut définir la même notion pour une partie ouverte X de G telle que $XH = X$. Notons que si X est un sous–groupe ouvert de G tel que $HX = X$, alors $XH = X$ et les deux notions coïncident.

Soit $\boldsymbol{S}(H\backslash G)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ telle que :
- $f(hg) = \Delta_G(h)\Delta_H(h^{-1})f(g)$ $(h \in H,\ g \in G)$;
- il existe un sous–groupe ouvert compact K_f de G tel que $f(gk) = f(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $k \in K_f$;
- il existe une partie ouverte compacte Ω_f de G telle que pour $g \in G \smallsetminus H\Omega_f$, on a $f(g) = 0$.

Notons que pour $f \in \boldsymbol{S}(H\backslash G)$, le support

$$\mathrm{Supp}(f) = \{g \in G : f(g) \neq 0\}$$

de f est une partie ouverte fermée de G, compacte modulo H.

Soit d_lh une mesure de Haar à gauche sur H, et $C_c^\infty(G) \to \boldsymbol{S}(H\backslash G)$, $f \mapsto \bar{f}$ l'application linéaire définie par

$$\bar{f}(g) = \Delta_G(g)\int_H f(hg)d_lh \quad (f \in C_c^\infty(G)).$$

Soit $\bar{\mu}$ une mesure de Haar à droite sur l'espace quotient $H\backslash G$ [**BZ**, 1.21], et μ la distribution sur G définie par

$$\mu(f) = \bar{\mu}(\bar{f}) \quad (f \in C_c^\infty(G)).$$

Pour $f \in C_c^\infty(G)$ et $x \in G$, notant $\rho_x(f) \in C_c^\infty(G)$ la fonction $g \mapsto f(gx)$, on a l'égalité $\overline{\rho_x(f)} = \Delta_G(x^{-1})\bar{f}$, d'où

$$\mu(\rho_x(f)) = \Delta_G(x^{-1})\bar{\mu}(\bar{f}) = \Delta_G(x^{-1})\mu(f).$$

On en déduit que $\Delta_G^{-1}\mu$ est une mesure de Haar à droite sur G, i.e. que μ est une mesure de Haar à gauche sur G [**BZ**, 1.19].

Supposons de plus que le groupe H est θ–stable. D'après le lemme 1, pour $f \in \boldsymbol{S}(H\backslash G)$, on a $f \circ \theta^{-1} \in \boldsymbol{S}(H\backslash G)$, et la forme linéaire $\bar{\mu}'$ sur $\boldsymbol{S}(H\backslash G)$ définie par $\bar{\mu}'(f) = \bar{\mu}(f \circ \theta^{-1})$ est une mesure de Haar à droite sur $H\backslash G$. On a donc $\bar{\mu}' = \Delta_{H\backslash G}(\theta)\bar{\mu}$ pour une constante $\Delta_{H\backslash G}(\theta) > 0$. Pour $f \in C_c^\infty(G)$ et $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}\overline{(f \circ \theta^{-1})}(g) &= \Delta_G(g)\int_H f(\theta^{-1}(hg))d_lh \\ &= \Delta_G(\theta^{-1}(g))\Delta_H(\theta)\int_H f(h\theta^{-1}(g))d_lh \\ &= \Delta_H(\theta)(\bar{f} \circ \theta^{-1})(g).\end{aligned}$$

Puisque $\mu(f \circ \theta^{-1}) = \Delta_G(\theta)\mu(f)$ $(f \in C_c^\infty(G))$, on en déduit l'égalité

$$(*) \qquad \Delta_G(\theta) = \Delta_H(\theta)\Delta_{H\backslash G}(\theta).$$

On peut bien sûr définir un caractère–module $\Delta_{H\backslash G} : H \to \mathbb{R}_{>0}$ en posant

$$\Delta_{H\backslash G}(h) = \Delta_G(h)\Delta_H(h)^{-1} \quad (h \in H).$$

Pour $h \in H$, l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}_G(h)$ de G stabilise H, et d'après $(*)$, on a

$$\Delta_{H\backslash G}(h) = \Delta_G(\mathrm{Int}_G(h^{-1}))\Delta_H(\mathrm{Int}_H(h)) = \Delta_{H\backslash G}(\mathrm{Int}_G(h^{-1})).$$

Remarque. — Le caractère $\Delta_{H\backslash G}$ de H vérifie encore $\Delta_{H\backslash G} \circ \theta = \Delta_{H\backslash G}$. En revanche, l'existence d'une partie ouverte compacte θ–stable de $H\backslash G$ n'implique pas que $\Delta_{H\backslash G}(\theta) = 1$. En particulier, même si le groupe G est compact modulo H, on a en général $\Delta_{H\backslash G}(\theta) \neq 1$. Prenons par exemple pour G le groupe $GL(2, F)$ des points F–rationnels du groupe linéaire $GL(2)$, où F est un corps localement compact non archimédien, et pour H le sous–groupe de $GL(2, F)$ formé des matrices triangulaires supérieures. Alors G est compact modulo H, et pour un élément x dans le tore diagonal de G, l'automorphisme $\theta = \mathrm{Int}_G(x)$ de G stabilise H. On a $\Delta_G(\theta) = 1$ mais $\Delta_H(\theta) = \Delta_H(x^{-1})$ peut ne pas être égal à 1.

2.2. Caractères des représentations admissibles de G (rappels). — Soit (π, V) une représentation lisse de G. Pour $f \in C_c^\infty(G)$, on note $\pi(f) = \pi(fd_lg) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ l'opérateur défini par

$$\pi(f)(v) = \int_G f(g)\pi(g)(v)d_lg \quad (v \in V);$$

l'intégrale est en fait une somme finie. Si K est un sous–groupe ouvert compact de G, alors pour toute fonction $f \in C_c(K\backslash G)$, on a $\pi(f)(V) \subset V^K$. Supposons de plus que π est admissible. Alors pour $f \in C_c^\infty(G)$, l'opérateur $\pi(f)$ est de rang fini, et l'on peut définir sa trace :

$$\Theta_\pi(f) = \mathrm{tr}(\pi(f)).$$

La distribution Θ_π sur G ainsi définie, est appelée le *caractère de* π (elle dépend bien sûr du choix de la mesure d_lg). Elle est invariante par conjugaison : pour $f \in C_c^\infty(G)$ et $x \in G$, notant ${}^xf = \mathrm{Int}_G(x)(f) \in C_c^\infty(G)$ la fonction $g \mapsto f(x^{-1}gx)$, on a l'égalité

$$\Theta_\pi({}^xf) = \Delta_G(x^{-1})\Theta_\pi(f).$$

2.3. Caractères tordus de G. — Soit (π, V) une représentation admissible de G, et soit un opérateur $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. On note Θ_π^A la distribution sur G définie par

$$\Theta_\pi^A(f) = \mathrm{tr}(\pi(f) \circ A) \quad (f \in C_c^\infty(G)).$$

On l'appelle le *caractère A–tordu de π* (tout comme Θ_π, la distribution Θ_π^A dépend du choix de la mesure $d_l g$). Notons que pour $f \in C_c^\infty(G)$ et $x \in G$, on a l'égalité

$$(*) \qquad \Theta_\pi^A({}^x f) = \Delta_G(x^{-1}) \Theta_\pi^{\pi(x^{-1}) \circ A \circ \pi(x)}(f).$$

Si de plus $A \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$, alors notant (π', V) la représentation $g \mapsto A \circ \pi(g) \circ A^{-1}$ de G, on a $A \in \mathrm{Isom}_G(\pi, \pi')$.

Remarque. — Supposons que les sous–espace $A(V)$ et $\ker A$ de V sont G–stables (ce qui est toujours le cas si A est un $\mathbb{C}$–automorphisme de V !). Alors l'espace quotient $\overline{V} = V/\ker A$ définit une représentation quotient (donc admissible) $\bar{\pi}$ de π. Notons $\bar{A} \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\overline{V}, A(V))$ l'opérateur déduit de A par passage au quotient. Il définit une représentation admissible $(\pi', A(V))$ de G : pour $g \in G$ et $v \in V$, on pose $\pi'(g)(v) = \bar{A} \circ \bar{\pi}(g) \circ \bar{A}^{-1}(v)$. En d'autres termes, on a $\bar{A} \in \mathrm{Isom}_G(\bar{\pi}, \pi')$, et pour $f \in C_c^\infty(G)$, l'opérateur $A \circ \pi(f)$ appartient à $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\overline{V}, A(V))$. ■

Soit maintenant θ un automorphisme de G, et ω un caractère de G. Si π est une représentation lisse de G, on note $\omega\pi$ et π^θ les représentations (lisses) de G définies par

$$\omega\pi = \pi \otimes \omega, \quad \pi^\theta = \pi \circ \theta.$$

Soit π une représentation admissible de G telle que $\omega\pi \simeq \pi^\theta$, et soit $A \in \mathrm{Isom}_G(\omega\pi, \pi^\theta)$. Alors la distribution Θ_π^A est ω–invariante par θ–conjugaison : pour $f \in C_c^\infty(G)$ et $x \in G$, notant ${}^{x,\theta}f = \mathrm{Int}_{G,\theta}(x)(f) \in C_c^\infty(G)$ la fonction $g \mapsto f(x^{-1} g \theta(x))$, on a l'égalité

$$(**) \qquad \Theta_\pi^A({}^{x,\theta}f) = \Delta_G(x^{-1}) \omega(x^{-1}) \Theta_\pi^A(f);$$

en utilisant que $\Delta_G(\theta(x^{-1})) = \Delta_G(x^{-1})$ (lemme de 2.1).

2.4. Espaces topologiques tordus. — On peut modifier la situation précédente de manière à « voir » la θ–conjugaison comme une conjugaison ordinaire. Soit H un groupe topologique. À la suite de J.-P. Labesse [La], appelons *H–espace (topologique) tordu*[4] la donnée :

- d'un H–espace principal homogène topologique $H^\natural$, c'est–à–dire un espace topologique $H^\natural$ muni d'une opération continue de H à gauche, notée $H \times H^\natural \to H^\natural$, $(h, \delta) \mapsto h \cdot \delta$, telle que pour un (et alors pour tout) $\delta \in H^\natural$, l'application $H \to H^\natural$, $h \mapsto h \cdot \delta$ est un homéomorphisme ;
- et d'une application $\mathrm{Int}_{H^\natural} : H^\natural \to \mathrm{Aut}(H)$ telle que

$$\mathrm{Int}_{H^\natural}(h \cdot \delta) = \mathrm{Int}_H(h) \circ \mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta) \quad (h \in H,\, \delta \in H^\natural).$$

On peut alors définir une opération continue de H sur $H^\natural$ à droite, $H^\natural \times H \to H^\natural$, $(\delta, h) \mapsto \delta \cdot h$, qui commute à l'action à gauche :

$$\delta \cdot h = \mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)(h) \cdot \delta.$$

4. Labesse travaille en fait dans la catégorie des groupes algébriques (cf. plus loin, 3.12), mais ses constructions se transposent aisément à la catégorie des groupes topologiques ; c'est ce que nous faisons ici. D'ailleurs la notion d'espace tordu étant tout aussi générale que celle d'espace principal homogène, elle s'adapte à n'importe quelle catégorie de groupes.

Pour $h \in H$, notons $\mathrm{Int}'_H(h) : H^\natural \to H^\natural$ l'homéomorphisme défini par

$$\mathrm{Int}'_H(h)(\delta) = h \cdot \delta \cdot h^{-1} = h\mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)(h^{-1}) \cdot \delta.$$

L'image de $H^\natural$ dans le groupe $\mathrm{Out}(H) = \mathrm{Aut}(H)/\mathrm{Int}(H)$ par l'application composée

$$H^\natural \xrightarrow{\mathrm{Int}_{H^\natural}} \mathrm{Aut}(H) \longrightarrow \mathrm{Out}(H),$$

est réduite à un point. Soit $\theta = \mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta_1)$ pour un $\delta_1 \in H^\natural$. C'est un automorphisme de H qui, par restriction, induit un automorphisme du centre $Z(H)$ de H. Ce dernier ne dépend pas du choix de δ_1. On peut donc poser

$$Z(H^\natural) = \{z \in Z(H) : \theta(z) = z\}.$$

C'est un sous–groupe fermé de $Z(H)$, qui coïncide avec le centralisateur de $H^\natural$ dans H, i.e. on a

$$\begin{aligned} Z(H^\natural) &= \{h \in H : \mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)(h) = h, \forall \delta \in H^\natural\} \\ &= \{h \in H : h \cdot \delta \cdot h^{-1} = \delta, \forall \delta \in H^\natural\}. \end{aligned}$$

Si pour tout $\delta \in H^\natural$, on a $\mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta) = \mathrm{id}_H$, on dit que $H^\natural$ est un *H–espace tordu trivial*. En particulier, le groupe topologique H est naturellement un H–espace tordu, et c'est un H–espace tordu trivial si et seulement s'il est commutatif.

Remarque 1. — Pour $\theta \in \mathrm{Aut}(H)$, on note $H\theta$ le sous-ensemble $H \rtimes \theta$ de $H \rtimes \mathrm{Aut}(H)$, muni de la topologie rendant continue la bijection $H \to H\theta$, $h \mapsto h\theta = h \rtimes \theta$ (ainsi cette bijection est un homéomorphisme). C'est un H–espace tordu. L'action $H \times H\theta \to H\theta$ est bien sûr donnée par $x \cdot h\theta = (xh)\theta$ $(x,\, h \in H)$, et l'application $\mathrm{Int}_{H\theta} : H\theta \to \mathrm{Aut}(H)$ est donnée par $\mathrm{Int}_{H\theta}(h\theta) = \mathrm{Int}_H(h) \circ \theta$ $(h \in H)$. Alors pour $x \in H$, l'application $\mathrm{Int}'_H(x^{-1}) : H\theta \to H\theta$ est donnée par

$$\mathrm{Int}'_H(x^{-1})(h\theta) = (x^{-1}h\theta(x))\theta \quad (h \in H). \qquad \blacksquare$$

Appelons *espace topologique tordu* la donnée d'un groupe topologique H et d'un H–espace tordu $H^\natural$; on note simplement $H^\natural$ l'espace topologique tordu défini par la paire $(H, H^\natural)$, le groupe H étant sous-entendu. Les espaces topologiques tordus s'organisent naturellement en une catégorie : un *morphisme* entre deux espaces topologiques tordus $H_1^\natural$ et $H_2^\natural$ est la donnée d'un morphisme de groupes continu $\phi : H_1 \to H_2$ et d'une application $\Phi : H_1^\natural \to H_2^\natural$, vérifiant

$$\Phi(x \cdot \delta \cdot y) = \phi(x) \cdot \Phi(\delta) \cdot \phi(y) \quad (\delta \in H_1;\ x,\, y \in H_1).$$

Notons que Φ est une application continue, et que ϕ est entièrement déterminé par Φ. On pose donc $\Phi^\circ = \phi$, et l'on note simplement Φ le morphisme défini par la paire (ϕ, Φ). L'application Φ est un homéomorphisme si et seulement si le morphisme Φ° en est un, auquel cas on dit que le morphisme Φ est un isomorphisme (resp. un automorphisme si $H_1^\natural = H_2^\natural$). Si $H^\natural$ un espace topologique tordu, on note $\mathrm{Aut}(H^\natural)$ le groupe des automorphismes de $H^\natural$.

On a des notions évidentes de sous–espace topologique tordu et d'espace topologique tordu quotient. Soit $H^\natural$ un espace topologique tordu. On appelle *sous–espace topologique tordu de* $H^\natural$ la donnée d'un sous–groupe topologique J de H et d'un sous–espace topologique $J^\natural$ de $H^\natural$, tels que les applications $H \times H^\natural \to H^\natural$ et $\mathrm{Int}_{H^\natural} : H^\natural \to \mathrm{Aut}(H)$ induisent sur $J^\natural$ une structure de J–espace tordu. On a donc $J^\natural = J \cdot \delta$ pour un élément $\delta \in H^\natural$ tel que $\mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)(J) = J$; mais l'élément δ n'est pas déterminé de manière unique par $J^\natural$. De même, on appelle *espace topologique tordu quotient de* $H^\natural$ la donnée d'un sous–groupe topologique distingué I de H tel que $\mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)(I) = I$ pour tout (i.e. pour un) $\delta \in H^\natural$; alors l'espace topologique quotient $H^\natural/I = I\backslash H^\natural$ des classes d'équivalence dans $H^\natural$ pour la translation à droite (resp. à gauche) par les éléments de I, est un (H/I)–espace tordu. Plus généralement, pour tout sous–groupe topologique I (non nécessairement distingué) de H tel que $\mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)(I) = I$ pour un $\delta \in H^\natural$, on définit de la même manière les espaces topologiques quotients $H^\natural/I$ et $I\backslash H^\natural$, qui ne sont en général pas des espaces tordus.

Soit $\Phi : H_1^\natural \to H_2^\natural$ un morphisme d'espaces topologiques tordus. L'image $\mathrm{Im}(\Phi) = \Phi(H_1^\natural)$ est naturellement munie d'une structure de $\Phi^\circ(H_1)$-espace tordu, mais il n'est en général pas possible de définir le noyau de Φ ; il faudrait pour cela travailler avec des espaces topologiques tordus *pointés*. En revanche, le noyau $\ker(\Phi^\circ)$ est bien défini dans la catégorie des groupes topologiques ; et pour $\delta \in H_1^\natural$ et $x \in \ker(\Phi^\circ)$, puisque

$$\Phi(\delta) = \Phi(\delta \cdot x) = \Phi(\mathrm{Int}_{H_1^\natural}(\delta)(x) \cdot \delta) = \Phi^\circ(\mathrm{Int}_{H_1^\natural}(\delta)(x)) \cdot \Phi(\delta),$$

on a $\mathrm{Int}_{H_1^\natural}(\delta)(x) = x$. On peut donc définir l'espace topologique tordu quotient $H_1^\natural/\ker(\Phi^\circ)$ de $H_1^\natural$. Par construction, le morphisme Φ induit par passage au quotient un isomorphisme d'espaces topologiques tordus

$$H_1^\natural/\ker(\Phi^\circ) \to \Phi(H_1^\natural).$$

Notons que même si la catégorie des espaces tordus n'est pas abélienne, on a des notions naturelles de morphisme injectif (resp. surjectif), et de suite exacte courte.

Remarque 2. — Soit $H^\natural$ un H–espace tordu, et soit $\delta_1 \in H^\natural$. Posons $\theta = \mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta_1)$. Pour $z \in Z(H)$, la translation à gauche $H^\natural \to H^\natural$, $\delta \mapsto \Phi_z(\delta) = z \cdot \delta$ est un élément de $\mathrm{Aut}(H^\natural)$, et l'application $Z(H) \to \mathrm{Aut}(H^\natural)$, $z \mapsto \Phi_z$ est un morphisme de groupes injectif ; on note $Z(H)'$ son image. Le groupe $Z(H)'$ coïncide avec le noyau du morphisme de groupes $\mathrm{Aut}(H^\natural) \to \mathrm{Aut}(H)$, $\Phi \mapsto \Phi^\circ$. En effet, pour $z \in Z(H)$, l'automorphisme Φ_z appartient à ce noyau. Réciproquement, soit $\Phi \in \mathrm{Aut}(H^\natural)$ tel que $\Phi^\circ = \mathrm{id}_H$. On a $\Phi(\delta_1) = h_1 \cdot \delta_1$ pour un (unique) $h_1 \in H$, et pour $x \in H$, on a

$$h_1 x \cdot \delta_1 = h_1 \cdot \delta_1 \cdot \theta^{-1}(x) = \Phi(\delta_1 \cdot \theta^{-1}(x)) = \Phi(x \cdot \delta_1) = x h_1 \cdot \delta_1.$$

Par conséquent $h_1 \in Z(H)$, et l'on a bien l'égalité $Z(H)' = \ker\{\mathrm{Aut}(H^\natural) \to \mathrm{Aut}(H)\}$. D'autre part, pour $h \in H$, l'application $\mathrm{Int}'_H(h) : H^\natural \to H^\natural$ est un élément de $\mathrm{Aut}(H^\natural)$. Les $\mathrm{Int}'_H(h)$ pour $h \in H$, engendrent un sous–groupe de $\mathrm{Aut}(H^\natural)$, que l'on note $\mathrm{Int}(H)'$. Soit $\mathrm{Int}(H^\natural)$ le sous–groupe de $\mathrm{Aut}(H^\natural)$ engendré par $Z(H)'$ et $\mathrm{Int}(H)'$. Alors on a la suite exacte courte de groupes

$$1 \to Z(H) \to \mathrm{Int}(H^\natural) \to \mathrm{Int}(H) \to 1.$$

Cette suite n'est en général pas scindée, sauf si la projection canonique $H/Z(H^\natural) \to H/Z(H)$ l'est. Notons que pour $z \in Z(H)$ et $h \in H$, on a

$$\mathrm{Int}'_H(zh) = \Phi_{z\theta(z^{-1})} \circ \mathrm{Int}'_H(h). \qquad \blacksquare$$

Remarque 3. — Continuons avec les notations de la remarque précédente : $\theta = \mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta_1)$ pour un $\delta_1 \in H^\natural$. L'application $\iota_{\delta_1} : H^\natural \to H\theta$, $h \cdot \delta_1 \mapsto h\theta$ est un isomorphisme d'espaces topologiques tordus, tel que $\iota_{\delta_1}^\circ = \mathrm{id}_H$. Mais d'après la remarque 2, il dépend du choix de δ_1, sauf si $Z(H) = \{1\}$. C'est pourquoi l'on préférera travailler avec un H–espace tordu $H^\natural$ muni d'un point–base δ_1, plutôt qu'avec un H–espace tordu $H\theta$. ■

2.5. Module d'un G–espace tordu. — Soit $G^\natural$ un G–espace tordu. On appelle *mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur* $G^\natural$ une distribution μ sur $G^\natural$, invariante pour l'action de G par translations à gauche (resp. à droite), et telle que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$, $\phi \geq 0$ et $\phi \neq 0$, on a $\mu(\phi) > 0$. En d'autres termes, fixé un élément $\delta_1 \in G^\natural$, les mesures de Haar à gauche (resp. à droite) sur $G^\natural$ sont les images des mesures de Haar à gauche (resp.

à droite) sur G par l'homéomorphisme $r_{\delta_1} : G \to G^\natural$, $g \mapsto g \cdot \delta_1$; de manière équivalente, ce sont les images des mesures de Haar à gauche (resp. à droite) sur G par l'homéomorphisme $l_{\delta_1} : G \to G^\natural$, $g \mapsto \delta_1 \cdot g$. Si μ est une mesure de Haar à gauche ou à droite sur G, on note $\mu \cdot \delta_1$ son image par r_{δ_1}, et $\delta_1 \cdot \mu$ son image par l_{δ_1}. On a

$$(*) \qquad \delta_1 \cdot \mu = \Delta_G(\mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1))(\mu \cdot \delta_1).$$

Si μ est une mesure de Haar à gauche sur G, alors la mesure $\delta_1 \cdot \mu$ sur $G^\natural$ ne dépend pas du choix de δ_1 ; on l'appelle la *mesure de Haar à gauche sur $G^\natural$ associée à μ*. De même, si μ est une mesure de Haar à droite sur G, alors la mesure $\mu \cdot \delta_1$ sur $G^\natural$ ne dépend pas du choix de δ_1 ; on l'appelle la *mesure de Haar à droite sur $G^\natural$ associée à μ*.

Soit $\Delta_{G^\natural} : G^\natural \to \mathbb{R}_{>0}$ le *module de $G^\natural$*, défini par

$$(**) \qquad \Delta_{G^\natural}(\gamma) = \Delta_G(\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)^{-1}).$$

Soit $d_l\gamma$ une mesure de Haar à gauche sur $G^\natural$.

Lemme. — *Soit $x \in G$ et $\gamma \in G^\natural$.*

(1) *On a (abus d'écriture) $d_l(\gamma \cdot x) = \Delta_G(x) d_l\gamma$.*

(2) *On a $\Delta_{G^\natural}(\gamma \cdot x) = \Delta_{G^\natural}(x \cdot \gamma) = \Delta_G(x)\Delta_{G^\natural}(\gamma)$.*

Démonstration. — On peut supposer que $d_l\gamma = \delta_1 \cdot d_l g$. Alors pour $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$, on a

$$\int_{G^\natural} \phi(\gamma \cdot x^{-1}) d_l\gamma = \int_G \phi(\delta_1 \cdot gx^{-1}) d_l g = \Delta_G(x) \int_{G^\natural} \phi(\gamma) d_l\gamma.$$

D'où le point (1).

Posons $\theta = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$. Puisque $\mathrm{Int}_{G^\natural}(x \cdot \gamma) = \mathrm{Int}_G(x) \circ \theta$, on a

$$\Delta_{G^\natural}(x \cdot \gamma) = \Delta_G(\theta^{-1} \circ \mathrm{Int}_G(x^{-1})) = \Delta_G(\theta^{-1})\Delta_G(\mathrm{Int}_G(x^{-1})).$$

D'où l'égalité $\Delta_{G^\natural}(x \cdot \gamma) = \Delta_G(x)\Delta_{G^\natural}(\gamma)$. Comme $\gamma \cdot x = \theta(x) \cdot \gamma$ et (1.1.1) $\Delta_G \circ \theta = \Delta_G$, on a aussi $\Delta_{G^\natural}(\gamma \cdot x) = \Delta_G(x)\Delta_{G^\natural}(\gamma)$. D'où le point (2). □

D'après le lemme, pour $x \in G$, on a (abus d'écriture) $\Delta_{G^\natural}(\gamma \cdot x)^{-1} d_l(\gamma \cdot x) = \Delta_{G^\natural}(\gamma)^{-1} d_l\gamma$. On en déduit que si μ est une mesure de Haar à gauche sur $G^\natural$, alors la distribution μ' sur $G^\natural$ définie par $d\mu'(\gamma) = \Delta_{G^\natural}(\gamma)^{-1} d\mu(\gamma)$ est une mesure de Haar à droite sur $G^\natural$, et on les obtient toutes de cette manière. De plus, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

– G est unimodulaire ;
– le module $\Delta_{G^\natural}$ est constant ;
– les notions de mesures de Haar à gauche et à droite sur $G^\natural$ coïncident.

Si les conditions ci–dessus sont vérifiées, on appelle simplement *mesure de Haar sur $G^\natural$*, une mesure de Haar à gauche (i.e à droite) sur $G^\natural$. Notons que si G est unimodulaire et si μ est une mesure de Haar sur G, alors les mesures de Haar $\delta_1 \cdot \mu$ et $\mu \cdot \delta_1$ sur $G^\natural$ sont reliées par l'égalité : $\mu \cdot \delta_1 = \Delta_{G^\natural}(\delta_1)(\delta_1 \cdot \mu)$.

Si $G^\natural = G\theta$ pour un automorphisme θ de G, et si μ est une mesure de Haar à gauche ou à droite sur G, on pose $\mu\theta = \mu \cdot 1\theta$.

2.6. Caractères des ω–représentations admissibles d'un G–espace tordu. — Soit $G^\natural$ un G–espace tordu, et ω un caractère de G. On appelle *ω–représentation lisse de $G^\natural$* la donnée d'une représentation lisse (π, V) de G et d'une application $\Pi : G^\natural \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ vérifiant

$$\Pi(x \cdot \gamma \cdot y) = \omega(y)\pi(x) \circ \Pi(\gamma) \circ \pi(y) \quad (\gamma \in G^\natural ;\ x,\, y \in G).$$

Notons que π est entièrement déterminée par Π : on a

$$\pi(x) = \Pi(x \cdot \gamma) \circ \Pi(\gamma)^{-1} \quad (x \in G,\, \gamma \in G^\natural).$$

La ω–representation lisse de G définie par (π, V) et Π comme ci–dessus est notée (Π, V), ou plus simplement Π, et la représentation lisse π de G associée à Π est notée Π°. On dit que Π est *admissible* si Π° l'est.

Les ω–représentations lisses de $G^\natural$ s'organisent naturellement en une catégorie $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$: si (Π_1, V_1) et (Π_2, V_2) sont deux ω–représentations lisses de $G^\natural$, une flêche entre Π_1 et Π_2 est par définition un *opérateur de $G^\natural$-entrelacement* entre Π_1 et Π_2, i.e. un morphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ tel que

$$u \circ \Pi_1(\gamma) = \Pi_2(\gamma) \circ u \quad (\gamma \in G^\natural).$$

On note $\mathrm{Hom}_{G^\natural}(\Pi_1, \Pi_2)$ l'espace des opérateurs d'entrelacement entre Π_1 et Π_2. Posons $\pi_i = \Pi_i^\circ$ $(i = 1,\, 2)$. Tout opérateur $u \in \mathrm{Hom}_{G^\natural}(\Pi_1, \Pi_2)$ appartient à $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$. En effet, choisissons un $\delta \in G^\natural$ et posons $A_1 = \Pi_1(\delta)$ et $A_2 = \Pi_2(\delta)$. Comme $u \circ A_1 = A_2 \circ u$, pour tout $g \in G$, on a

$$\begin{aligned} u \circ \pi_1(g) \circ A_1 &= u \circ \Pi_1(g \cdot \delta) \\ &= \Pi_2(g \cdot \delta) \circ u \\ &= \pi_2(g) \circ A_2 \circ u \\ &= \pi_2(g) \circ u \circ A_1 \end{aligned}$$

d'où

$$u \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ u.$$

En d'autres termes, l'application $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ définit un foncteur d'oubli $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(G)$, et ce foncteur est fidèle. Pour plus de détails sur les ω–représentations lisses de $G^\natural$, en particulier celles qui sont « irréductibles », on renvoie à l'annexe A.

Fixons un élément $\delta_1 \in G^\natural$ et posons $\theta = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$. Soit Π une ω–représentation lisse de $G^\natural$. Posons $\pi = \Pi^\circ$ et $A = \Pi(\delta_1)$. Alors pour $g \in G$, on a $\pi(g) = \Pi(g \cdot \delta_1) \circ A^{-1}$ et

$$\omega(g) A \circ \pi(g) = \pi(\theta(g)) \circ A;$$

i.e. $A \in \mathrm{Isom}_G(\omega\pi, \pi^\theta)$. En d'autres termes, la donnée d'une ω–représentation lisse Π de $G^\natural$ équivaut à celle d'une paire (π, A) formée d'une représentation lisse π de G telle que $\omega\pi \simeq \pi^\theta$, et d'un opérateur d'entrelacement $A \in \mathrm{Isom}_G(\omega\pi, \pi^\theta)$. De plus, si Π_1 et Π_2 sont deux ω–représentations lisses de $G^\natural$, posant $\pi_i = \Pi_i^\circ$ et $A_i = \Pi_i(\delta_1)$ $(i = 1,\, 2)$, on a

$$\mathrm{Hom}_{G^\natural}(\Pi_1, \Pi_2) = \{u \in \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2) : u \circ A_1 = A_2 \circ u\}.$$

Remarque. — Pour qu'il existe une ω–représentation Π de $G^\natural$ telle que la représentation Π° de G soit irréductible, il est nécessaire que le caractère ω de G soit trivial sur $Z(G^\natural)$. En effet, l'ensemble $Z(G)(\theta - 1) = \{\theta(z) z^{-1} : z \in Z(G)\}$ est un sous–groupe fermé de $Z(G)$, qui ne dépend pas du choix de δ_1, et l'on a la suite exacte courte de groupes topologiques

$$1 \to Z(G^\natural) \to Z(G) \to Z(G)(\theta - 1) \to 1.$$

Supposons qu'il existe une ω–représentation lisse (Π, V) de $G^\natural$ telle que la représentation $\pi = \Pi^\circ$ de G est irréductible. D'après le lemme se Schur, pour $z \in Z(G)$, l'opérateur $\pi(z)$ est de la forme $\omega_\pi(z)\mathrm{id}_V$ pour un élément $\omega_\pi(z) \in \mathbb{C}^\times$, et l'application $z \mapsto \omega_\pi(z)$ est un caractère de $Z(G)$. Pour $z \in Z(G)$ et $\gamma \in G^\natural$, posant $\pi = \Pi^\circ$, on a

$$\omega_\pi(\theta(z)) \Pi(\gamma) = \Pi(\theta(z) \cdot \gamma) = \Pi(\gamma \cdot z) = \omega(z) \omega_\pi(z) \Pi(\gamma),$$

d'où $\omega_\pi(z^{-1}\theta(z)) = \omega(z)$. En particulier, on a $\omega|_{Z(G^\natural)} = 1$. ■

Notons $d_l\gamma = \delta_1 \cdot d_l g$ la mesure de Haar à gauche sur $G^\natural$ associée à $d_l g$. Rappelons (2.5) que $\Delta_{G^\natural}(\delta_1) d_l\gamma = d_l g \cdot \delta_1$. Soit (Π, V) une ω–représentation lisse de $G^\natural$. Pour $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$, on note $\Pi(\phi) = \Pi(\phi d_l\gamma) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ l'opérateur défini (comme en 1.2) par

$$\Pi(\phi)(v) = \int_{G^\natural} \phi(\gamma)\Pi(\gamma)(v) d_l\gamma \quad (v \in V).$$

Supposons de plus que Π est admissible. Alors cet opérateur $\Pi(\phi)$ est de rang fini. En effet, notant $C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(G^\natural)$, $f \mapsto f^\natural$ l'isomorphisme de $\mathbb{C}$–espaces vectoriels défini par

$$f^\natural(g \cdot \delta_1) = \Delta_{G^\natural}(\delta_1)^{-1} f(g) \quad (g \in G),$$

et posant $\pi = \Pi^\circ$ et $A = \Pi(\delta_1)$, on a

$$\Pi(f^\natural) = \pi(f) \circ A \quad (f \in C_c^\infty(G)).$$

On peut donc définir la trace de $\Pi(\phi)$:

$$\Theta_\Pi(\phi) = \mathrm{tr}(\Pi(\phi)) \quad (\phi \in C_c^\infty(G^\natural)).$$

La distribution Θ_Π sur $G^\natural$ ainsi définie, est appelée le *caractère de* Π (elle dépend bien sûr du choix de la mesure $d_l\gamma$). Pour $f \in C_c^\infty(G)$, on a

$$\Theta_\Pi(f^\natural) = \mathrm{tr}(\pi(f) \circ A) = \Theta_\pi^A(f).$$

Pour $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$ et $x \in G$, notant ${}^x\phi = \mathrm{Int}_{G^\natural}(x)(\phi) \in C_c^\infty(G^\natural)$ la fonction $\gamma \mapsto \phi(x^{-1}\cdot\gamma\cdot x)$, on a (d'après la relation $(**)$ de 2.3)

$$(*) \qquad \Theta_\Pi({}^x\phi) = \Delta_G(x^{-1})\omega(x^{-1})\Theta_\Pi(\phi);$$

en utilisant (lemme de 2.1) que $\Delta_G(\mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1)(x^{-1})) = \Delta_G(x^{-1})$.

2.7. Induction compacte. — Soit $G^\natural$ un G–espace tordu, et ω un caractère de G. Soit aussi H un sous–groupe *fermé* de G, et $H^\natural$ un H–espace tordu qui soit un sous–espace topologique tordu de $G^\natural$. Choisissons un élément $\delta_1 \in H^\natural$, et posons $\theta = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$. On a donc $\theta(H) = H$ et $\theta|_H = \mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta_1)$. On note encore ω le caractère $\omega|_H$ de H, et θ l'automorphisme $\theta|_H$ de H.

On définit comme suit un foncteur induction compacte (lisse)

$${}^\omega\mathrm{ind}_{H^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(H^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(G^\natural, \omega).$$

Soit (Σ, W) une ω–représentation lisse de $H^\natural$. Posons $\sigma = \Sigma^\circ$ et $B = \Sigma(\delta_1) \in \mathrm{Isom}_H(\omega\sigma, \sigma^\theta)$. Notons $V^\natural = \mathrm{ind}_H^{G^\natural}(W)$ l'espace des fonctions $\boldsymbol{\mathcal{F}} : G^\natural \to W$ telles que

- $\boldsymbol{\mathcal{F}}(h \cdot \gamma) = \sigma(h)(\boldsymbol{\mathcal{F}}(\gamma))$ pour tout $(h, \gamma) \in H \times G^\natural$,
- il existe un sous–groupe ouvert compact $K_{\mathcal{F}}$ de G tel que $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\gamma \cdot k) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in G$ et tout $k \in K_{\mathcal{F}}$,
- le support de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est compact modulo H.

Soit (π, V) la représentation induite compacte (lisse, non normalisée) $\mathrm{ind}_H^G(\sigma, W)$. On rappelle la définition : V est l'espace $\mathrm{ind}_H^G(W)$ obtenu en remplaçant $G^\natural$ par G dans la définition de $V^\natural$, et $\pi = \mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ est la représentation lisse de G sur V donnée par

$$\pi(g)(\mathcal{F})(x) = \mathcal{F}(xg) \quad (\mathcal{F} \in V;\ g,\, x \in G).$$

Pour $\mathcal{F} \in V$, notons $\mathcal{F}^\natural : G^\natural \to W$ la fonction définie par

$$\mathcal{F}^\natural(g \cdot \delta_1) = \omega(\theta^{-1}(g))B(\mathcal{F}(\theta^{-1}(g))) \quad (g \in G),$$

i.e. par

$$\mathcal{F}^\natural(\delta_1 \cdot g) = \omega(g)B(\mathcal{F}(g)) \quad (g \in G).$$

Pour $\mathcal{F} \in V$ et $(h,g) \in H \times G$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^\natural(hg \cdot \delta_1) &= \omega(\theta^{-1}(hg))B(\mathcal{F}(\theta^{-1}(hg)))\\ &= \omega(\theta^{-1}(g))B \circ \omega\sigma(\theta^{-1}(h))(\mathcal{F}(\theta^{-1}(g)))\\ &= \omega(\theta^{-1}(g))\sigma(h) \circ B(\mathcal{F}(\theta^{-1}(g)))\\ &= \sigma(h)(\mathcal{F}^\natural(g \cdot \delta_1)).\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{F}^\natural \in V^\natural$, et puisque $B \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(W)$, l'application

$$V \to V^\natural,\ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^\natural$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$–espaces vectoriels. Cet isomorphisme ne dépend pas du choix de δ_1 : d'après le calcul ci–dessus, pour $\mathcal{F} \in V$, on a

$$\mathcal{F}^\natural(\delta \cdot g) = \omega(g)\Sigma(\delta)(\mathcal{F}(g)) \quad (\delta \in H^\natural,\ g \in G). \tag{1}$$

Pour $\gamma \in G^\natural$, soit $\Pi(\gamma) \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ l'opérateur défini par

$$\Pi(\gamma)(\mathcal{F})(g) = \mathcal{F}^\natural(g \cdot \gamma) \quad (\mathcal{F} \in V). \tag{2}$$

Pour $\mathcal{F} \in V$, $\gamma = z \cdot \delta_1 \in G^\natural$ et $x,\ y,\ g \in G$, on a

$$\begin{aligned}\Pi(x \cdot \gamma \cdot y)(\mathcal{F})(g) &= \mathcal{F}^\natural(gxz\theta(y) \cdot \delta_1)\\ &= \omega(\theta^{-1}(gxz)y)B(\mathcal{F}(\theta^{-1}(gxz)y)))\\ &= \omega(y)\omega(\theta^{-1}(gxz))B(\pi(y)(\mathcal{F})(\theta^{-1}(gxz)))\\ &= \omega(y)[\pi(y)(\mathcal{F})]^\natural(gx \cdot \gamma)\\ &= \omega(y)\Pi(\gamma) \circ \pi(y)(\mathcal{F})(gx)\\ &= \omega(y)\pi(x) \circ \Pi(\gamma) \circ \pi(y)(\mathcal{F})(g).\end{aligned}$$

L'application $G^\natural \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$, $\gamma \mapsto \Pi(\gamma)$ est donc une ω–représentation lisse de $G^\natural$, telle que $\Pi^\circ = \pi$. On pose

$${}^\omega\mathrm{ind}_{H^\natural}^{G^\natural}(\Sigma, W) = (\Pi, V).$$

Notons que l'opérateur $A = \Pi(\delta_1) \in \mathrm{Isom}_G(\omega\pi, \pi^\theta)$ est donné par

$$A(\mathcal{F})(g) = \mathcal{F}^\natural(g \cdot \delta_1) \quad (\mathcal{F} \in V,\ g \in G).$$

D'après les relations (1) et (2), pour $\mathcal{F} \in V$, $\delta \in H^\natural$ et $g,\ x \in G$, on a

$$\Pi(g \cdot \delta)(\mathcal{F})(x) = \omega(\mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)^{-1}(xg))\Sigma(\delta)(\mathcal{F}(\mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)^{-1}(xg));$$

en particulier pour $x = 1$, on a

$$\Pi(\delta \cdot g)(\mathcal{F})(1) = \omega(g)\Sigma(\delta)(\mathcal{F}(g))$$

Par construction, les foncteurs ${}^\omega\mathrm{ind}_{H^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(H^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$ et $\mathrm{ind}_H^G : \mathfrak{R}(H) \to \mathfrak{R}(G)$ commutent aux foncteurs d'oubli, au sens où pour toute ω–représentation lisse Σ de $H^\natural$, on a

$${}^\omega\mathrm{ind}_{H^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)^\circ = \mathrm{ind}_H^G(\Sigma^\circ).$$

Notons que si G est compact modulo H, la condition sur le support de $\mathcal{F}$ est automatiquement vérifiée, et si de plus Σ est admissible, alors Π l'est aussi [**BZ**, 2.26].

2.8. Caractères des induites compactes. — Continuons avec les notations de 2.7. On fixe une mesure de Haar à gauche d_lh sur H, et l'on note d_rh la mesure de Haar à droite $\Delta_H(h^{-1})d_lh$ sur H. Pour toute représentation lisse σ de H, on pose $\sigma(f) = \sigma(fd_lh)$ ($f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$), et si σ est admissible, on note Θ_σ la distribution sur H définie par d_lh comme en 1.2.

Soit $d_l\gamma = \delta_1 \cdot d_lg$ la mesure de Haar à gauche sur $G^\natural$ associée à d_lg, et soit $d_l\delta = \delta_1 \cdot d_lh$ la mesure de Haar à gauche sur $H^\natural$ associée à d_lh. Pour toute ω–représentation lisse Π de G, on pose $\Pi(\phi) = \pi(\phi d_l\gamma)$ ($\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural)$), et si Π est admissible, on note Θ_Π la distribution sur $G^\natural$ définie par $d_l\gamma$ comme en 1.6. De même, pour toute ω–représentation lisse Σ de $H^\natural$, on pose $\Sigma(\phi) = \Sigma(\phi d_l\delta)$ ($\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H^\natural)$), et si Σ est admissible, on note Θ_Σ la distribution sur $H^\natural$ définie par $d_l\delta$.

Pour toute partie ouverte compacte Ω de G telle que $H \cap \Omega \neq \emptyset$, on note

$$C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural) \to C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural), \phi \mapsto \phi_\Omega = {}^\omega\phi_\Omega$$

l'application linéaire définie par

$$\phi_\Omega(\gamma) = \mathrm{vol}(H \cap \Omega, d_rh)^{-1} \int_\Omega \omega(g)\phi(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g)d_lg \quad (\gamma \in G^\natural).$$

Notons que si $H \cap \Omega$ est un groupe (par exemple si Ω est un sous–groupe de G), alors puisque ce groupe est compact, on a $\Delta_H|_{H\cap\Omega} = 1$ et $\mathrm{vol}(H \cap \Omega, d_rh) = \mathrm{vol}(H \cap \Omega, d_lh)$.

Considérons les deux conditions suivantes :

(i) Le groupe G est compact modulo H.

(ii) Il existe un sous–groupe ouvert compact K de G tel que $HK = KH$.

Si G est compact modulo H, et si K est un sous–groupe ouvert compact de G, alors il existe une partie ouverte compacte Ω de G telle que $G = H\Omega$ et $K\Omega = \Omega$. Puisque $G = H\Omega$, l'ensemble $H \cap \Omega$ n'est pas vide. Si de plus $HK = KH$, alors l'ensemble HK est un sous–groupe ouvert de G, et comme $G = H\Omega$, il est d'indice fini dans G. Choisissons un système de représentants $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans G de l'espace quotient $HK\backslash G$, et posons $\Omega' = \bigcup_{i=1}^n Kx_i$ (l'union est disjointe). On peut supposer que $1 \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors Ω' est une partie ouverte compacte de G vérifiant :

(iii) $G = H\Omega'$, $K\Omega' = \Omega'$ et $H \cap \Omega' = H \cap K$.

Proposition. — *On suppose que les conditions* (i) *et* (ii) *sont vérifiées. Choisissons un sous–groupe ouvert compact K de G tel que $HK = KH$, et un système de représentants $\{x_1 = 1, x_2, \ldots, x_n\}$ dans G de l'espace quotient $HK\backslash G$. Posons $\Omega' = \bigcup_{i=1}^n Kx_i$. Soit Σ une ω–représentation admissible de $H^\natural$, et soit $\Pi = {}^\omega\mathrm{ind}_{H^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)$. Pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural)$, on a la formule de descente*

$$\Theta_\Pi(\phi) = \Theta_\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural}).$$

Démonstration. — La démonstration est longue et laborieuse, mais son principe est simple : fixée la fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural)$, on construit un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie $\boldsymbol{X}$ et un opérateur $\boldsymbol{T} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})$, tels que $\Theta_\Pi(\phi) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$; puis on calcule la trace de $\boldsymbol{T}$. Soit W l'espace de Σ, et soit $V = \mathrm{ind}_H^G(W)$ l'espace de Π. Posons $\sigma = \Sigma^\circ$ et $B = \Pi(\delta_1)$, $\pi = \Pi^\circ$ et $A = \Pi(\delta_1)$.

Par définition, l'union $\Omega' = \bigcup_{i=1}^n Kx_i$ est disjointe, et Ω' est une partie ouverte compacte de G vérifiant (iii). Posons $K' = H \cap \Omega'$, et notons $\mathfrak{X}'$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des fonctions localement constantes $\Omega' \to W$. On a une identification canonique $\mathfrak{X}' = C^\infty(\Omega') \otimes_{\mathbb{C}} W$. Puisque $G = H\Omega'$, l'application $V \to \mathfrak{X}'$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}|_{\Omega'}$ identifie V au sous–espace $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}'$ formé des fonctions $\mathcal{F}'$ telles que $\mathcal{F}'(hx) = \sigma(h)(\mathcal{F}'(x))$ pour tout $(x,h) \in \Omega' \times K'$. Soit $(\eta, C^\infty(\Omega'))$ la représentation admissible de K définie par

$$\eta(k)(\varphi)(x) = \varphi(k^{-1}x) \quad (k \in K,\, \varphi \in C^\infty(\Omega'),\, x \in \Omega').$$

Posons $c = \mathrm{vol}(K', d_l h)$. Le $\mathbb{C}$–endomorphisme u de $\mathfrak{X}'$ défini par

$$u(\varphi \otimes w) = c^{-1} \int_{H\cap K} \eta(h)(\varphi) \otimes \sigma(h)(w) d_l h \quad (\varphi \in C^\infty(\Omega'),\, x \in \Omega')$$

est un projecteur sur $\mathfrak{X}$; i.e. on a $u(\mathfrak{X}') = \mathfrak{X}$ et $u|_{\mathfrak{X}} = \mathrm{id}$.

Soit une fonction $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$. Choisissons deux sous–groupes ouverts distingués K_1 et K_2 de K tels que :
- $\phi \in C_c(K_1\backslash G^\natural/K_1)$ et $\omega|_{K_1} = 1$;
- $K_2 \subset K_1$ et $x_i^{-1}K_2x_i \subset K_1 \subset x_i^{-1}Kx_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Soit $e_{K^1} \in C_c^\infty(G)$ la fonction $\mathrm{vol}(K_1, d_l g)^{-1}\mathbf{1}_{K_1}$ où $\mathbf{1}_{K_1}$ désigne la fonction caractéristique de K_1. Puisque $\phi \in C_c(K_1\backslash G^\natural/K_1)$ et $\omega|_{K_1} = 1$, on a

$$\pi(e_{K_1}) \circ \Pi(\phi) \circ \pi(e_{K_1}) = \Pi(\phi).$$

En particulier, on a

$$\Pi(\phi)(V) \subset \pi(e_{K_1})(V) = V^{K_1};$$

et posant $V(K_1) = \langle \mathcal{F} - \pi(k)(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in V,\, k \in K_1\rangle$, on a

$$\Pi(\phi)(V(K_1)) = 0.$$

D'autre part, puisque $x_i^{-1}K_2x_i \subset K_1 \subset x_i^{-1}Kx_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, on a

$$K_2\Omega' K_1 = \Omega'.$$

Posons $K_2' = H \cap K_2$, et $\boldsymbol{X} = C(K_2\backslash\Omega') \otimes W^{K_2'}$; c'est un sous–espace vectoriel de dimension finie de $\mathfrak{X}'$. Alors via l'identification $V = \mathfrak{X}$, on a l'inclusion $V^{K_1} \subset \boldsymbol{X}$. Notons T' l'opérateur $\Pi(\phi d_l\gamma) \circ u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{X}')$. Il est de rang fini puisque $T'(\mathfrak{X}') \subset \boldsymbol{X}$, et l'on a

$$\Theta_\Pi(\phi) = \mathrm{tr}(T').$$

Posons $\boldsymbol{T} = T'|_{\boldsymbol{X}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})$. Par définition de la trace d'un opérateur de rang fini, on a $\mathrm{tr}(T') = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$. D'où le

Lemme 1. — *On a* $\Theta_\Pi(\phi) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$.

Remarque 1. — Notons $W(K_2')$ le sous–espace vectoriel de W engendré par les éléments $w - \sigma(k)(w)$ pour $w \in W$ et $k \in K_2'$. Alors on a la décomposition $W = W^{K_2'} \oplus W(K_2')$. De même, en remplaçant (σ, W) par la représentation $(\eta, C^\infty(\Omega'))$, on a la décomposition $C^\infty(\Omega') = C^\infty(K_2\backslash\Omega') \oplus C^\infty(\Omega')(K_2)$. On a aussi la décomposition $V = V^{K_1} \oplus V(K_1)$. Par définition des groupes K_1, K_2 et K_2', on a

$$u(C(K_2\backslash\Omega') \otimes W(K_2')) = 0, \quad u(C^\infty(\Omega')(K_2) \otimes W) \subset V(K_1).$$

En effet, pour $\varphi \in C(K_2\backslash\Omega')$, $w \in W$ et $k' \in K_2'$, puisque $\omega(k')(\varphi) = \varphi$ et $\Delta_H|_{K_2'} = 1$, on a

$$\begin{aligned} u(\varphi \otimes \sigma(k')(w)) &= c^{-1} \int_{K'} \eta(h)(\varphi) \otimes \sigma(hk')(w) d_l h \\ &= c^{-1} \int_{K'} \eta(hk')(\varphi) \otimes \sigma(hk')(w) d_l h \\ &= u(\varphi \otimes w). \end{aligned}$$

D'où l'égalité $u(C(K_2\backslash\Omega')\otimes W(K_2'))=0$. D'autre part, via l'identification $V=\mathfrak{X}$, $V(K_1)$ s'identifie au sous–espace vectoriel de $\mathfrak{X}$ formé des fonctions $\mathcal{F}$ telles que $\int_{K_1}\mathcal{F}(xg)d_lg=0$ pour tout $x\in\Omega'$. Or pour $\varphi\in C^\infty(\Omega')$, $k\in K_2$, $w\in W$ et $x\in\Omega'$, on a

$$\begin{aligned}\int_{K_1} u(\eta(k)\varphi\otimes w)(xg)d_lg &= \iint_{K_1\times K'}\eta(hk)(\varphi)(xg)\otimes\sigma(h)(w)d_lgd_lh\\ &= \iint_{K_1\times K'}\varphi(k^{-1}h^{-1}xg)\otimes\sigma(h)(w)d_lgd_lh.\end{aligned}$$

Mais pour $h\in K'$, on a $k^{-1}h^{-1}=h^{-1}k'^{-1}$ avec $k'=hkh^{-1}\in K_2$, et l'on a $k'^{-1}x=xk''^{-1}$ avec $k''=x^{-1}k'x\in K_1$; on peut donc effectuer le changement de variables $g\mapsto k''g$. En définitive, on obtient l'égalité

$$\int_{K_1}u(\eta(k)\varphi\otimes w)(xg)d_lg=\int_{K_1}u(\varphi\otimes w)(xg)d_lg.$$

D'où l'inclusion $u(C^\infty(\Omega')(K_2)\otimes W)\subset V(K_1)$. ∎

Calculons la trace de l'opérateur $\boldsymbol{T}$. Notons $(\check\sigma,\check W)$ la représentation de H contragrédiente de σ. L'application canonique $W\times\check W\to\mathbb{C}$, $(w,\check w)\mapsto\langle w,\check w\rangle$ induit par restriction une identification $\check W^{K_2'}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{K_2'},\mathbb{C})$. Posons $\widetilde{\boldsymbol{X}}=C(K_2\backslash\Omega')\otimes\check W^{K_2'}$, et notons

$$\boldsymbol{X}\times\widetilde{\boldsymbol{X}}\to\mathbb{C},\ (\mathcal{F},\widetilde{\mathcal{F}})\mapsto\langle\mathcal{F},\widetilde{\mathcal{F}}\rangle$$

l'application bilinéaire non dégénérée définie par

$$\langle\mathcal{F},\widetilde{\mathcal{F}}\rangle=\int_{\Omega'}\langle\mathcal{F}(g),\widetilde{\mathcal{F}}(g)\rangle d_lg=\sum_{i=1}^n\Delta_G(x_i)\int_K\langle\mathcal{F}(gx_i),\widetilde{\mathcal{F}}(gx_i)\rangle d_lg.$$

Elle induit une identification $\widetilde{\boldsymbol{X}}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X},\mathbb{C})$.

Lemme 2. — *On a* $\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})=\Theta_\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural})$.

Démonstration. — Fixons une base $\mathfrak{B}$ de $W^{K_2'}$ sur $\mathbb{C}$, et notons $\{\check w\}_{w\in\mathfrak{B}}$ la base de $\check W^{K_2'}$ duale de $\mathfrak{B}$. Choisissons un système de représentants $\{k_1,\ldots,k_s\}$ dans K des éléments du groupe quotient $K_2\backslash K$, et pour $j=1,\ldots,s$, posons $\varphi^{k_j}=\mathbf{1}_{K_2k_j}\in C(K_2\backslash K)$. Alors $\mathfrak{C}_\circ=\{\varphi^{k_j}\}_{j=1,\ldots,s}$ est une base de $C(K_2\backslash K)$ sur $\mathbb{C}$. Pour $\varphi\in\mathfrak{C}_\circ$ et $i\in\{1,\ldots,n\}$, notons $\varphi_i\in C(K_2\backslash\Omega')$ la fonction définie par $\mathrm{Supp}(\varphi_i)\subset Kx_i$ et $\varphi_i(kx_i)=\varphi(k)$ $(k\in K)$. Alors $\mathfrak{C}=\{\varphi_i\}_{\varphi\in\mathfrak{C}_\circ,\,i=1,\ldots,n}$ est une base de $C(K_2\backslash\Omega')$ sur $\mathbb{C}$, et $\mathfrak{D}=\{\psi\otimes w\}_{\psi\in\mathfrak{C},\,w\in\mathfrak{B}}$ est une base de $\boldsymbol{X}$ sur $\mathbb{C}$. Posons $d=\mathrm{vol}(K_2,d_lg)$. Puisque $\Delta_G|_K=1$, $\{d^{-1}(\Delta_G^{-1}\psi)\otimes\check w)\}_{\psi\in\mathfrak{C},\,w\in\mathfrak{B}}$ est la base de $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ duale de $\mathfrak{D}$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) &= d^{-1}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\sum_{\psi\in\mathfrak{C}}\langle\boldsymbol{T}(\psi\otimes w),(\Delta_G^{-1}\psi)\otimes\check w\rangle\\ &= d^{-1}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\sum_{\psi\in\mathfrak{C}}\sum_{i=1}^n\int_K\psi(kx_i)\langle\boldsymbol{T}(\psi\otimes w)(kx_i),\check w\rangle dk\\ &= d^{-1}\sum_{i=1}^n\sum_{w\in\mathfrak{B}}\sum_{\varphi\in\mathfrak{C}_\circ}\int_K\varphi(k)\langle\boldsymbol{T}(\varphi_i\otimes w)(kx_i),\check w\rangle dk,\end{aligned}$$

où l'on a posé $dk = d_lg|_K$. Soit $\psi \in C(K_2\backslash\Omega')$, $w \in W$ et $x \in \Omega'$. Posons $\mathcal{F} = u(\psi \otimes w) \in V$ et notons $\mathcal{F}^\natural \in V^\natural$ la fonction $G^\natural \to W$, $g\cdot\delta_1 \mapsto \omega(\theta^{-1}(g))B(\mathcal{F}(\theta^{-1}(g))$ — cf. 2.7. Alors on a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\psi\otimes w)(x) &= \int_{G^\natural}\phi(\gamma)\Pi(\gamma)(\mathcal{F})(x)d_l\gamma\\ &= \Delta_G(\theta)^{-1}\int_G \phi(g\cdot\delta_1)A(\mathcal{F})(xg)d_lg\\ &= \Delta_G(\theta)^{-1}\int_G \phi(x^{-1}g\cdot\delta_1)A(\mathcal{F})(g)d_lg\\ &= \int_{G^\natural}\phi(x^{-1}\cdot\gamma)\mathcal{F}^\natural(\gamma)d_l\gamma.\end{aligned}$$

Puisque $G = \coprod_{i=1}^n HKx_i$, on a les décompositions

$$G = \coprod_{i=1}^n H\theta(Kx_i),\quad G^\natural = \coprod_{i=1}^n H^\natural\cdot Kx_i = \coprod_{i=1}^n \delta_1\cdot HKx_i.$$

D'après le lemme de 2.5, pour $i = 1,\ldots,n$, on a $d_l(\gamma\cdot x_i) = \Delta_G(x_i)d_l(\gamma)$. Comme $d_l\gamma = \delta_1\cdot d_lg$, $d_l\delta = \delta_1\cdot d_lh$, $H\cap K = K'$ et $\mathrm{vol}(K', d_lh) = c$, posant $\Delta_i = c^{-1}\Delta_G(x_i)$, on obtient

$$\boldsymbol{T}(\psi\otimes w)(x) = \sum_{i=1}^n \Delta_i \iint_{H^\natural\times K}\phi(x^{-1}\cdot\delta\cdot kx_i)\mathcal{F}^\natural(\delta\cdot kx_i)d_l\delta dk.$$

Or pour $\delta\in H^\natural$, on a (relation (1) de 2.7) $\mathcal{F}^\natural(\delta\cdot kx_i) = \omega(kx_i)\Sigma(\delta)(\mathcal{F}(kx_i))$ et

$$\begin{aligned}\Sigma(\delta)(\mathcal{F}(kx_i)) &= c^{-1}\int_{K'}\omega(kx_i)\psi(k'^{-1}kx_i)\Sigma(\delta)\circ\sigma(k')(w)dk'\\ &= c^{-1}\int_{K'}\omega\psi(k'^{-1}kx_i)\Sigma(\delta\cdot k')(w)dk',\end{aligned}$$

où l'on a posé $dk' = d_lh|_{K'}$. En effectuant les changements de variables $\delta\mapsto\delta\cdot k'^{-1}$ (notons que $d_l(\delta\cdot k'^{-1}) = \Delta_H(k'^{-1})d_l\delta = d_l\delta$) puis $k\mapsto k'k$ dans la formule pour $\boldsymbol{T}(\psi\otimes w)(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}(\psi\otimes w)(x) =\\ &= c^{-1}\sum_{i=1}^n\Delta_i\iiint_{H^\natural\times K\times K'}\phi(x^{-1}\cdot\delta\cdot kx_i)\omega\psi(k'^{-1}kx_i)\Sigma(\delta\cdot k')(w)d_l\delta dkdk'\\ &= \sum_{i=1}^n\Delta_i\iint_{H^\natural\times K}\phi(x^{-1}\cdot\delta\cdot kx_i)\omega\psi(kx_i)\Sigma(\delta)(w)d_l\delta dk.\end{aligned}$$

En particulier, si $\psi = \varphi_i$ et $x = k_0x_i$ pour un $\varphi\in\mathfrak{C}_\circ$, un $i\in\{1,\ldots,n\}$ et un $k_0\in K$, alors on a

$$\boldsymbol{T}(\varphi_i\otimes w)(k_0x_i) = \omega(x_i)\Delta_i\iint_{H^\natural\times K}\phi(x_i^{-1}k_0^{-1}\cdot\delta\cdot kx_i)\omega\varphi(k)\Sigma(\delta)(w)d_l\delta dk.$$

Injectons l'égalité ci–dessus dans la formule pour $\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$. On obtient

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) = d^{-1}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\int_H\Phi(\delta)\langle\Sigma(\delta)(w),\check{w}\rangle d_l\delta$$

où

$$\Phi(\delta) = \sum_{i=1}^n\omega(x_i)\Delta_i\sum_{\varphi\in\mathfrak{C}_\circ}\iint_{K\times K}\varphi(k_0)\varphi(k)\omega(k)\phi(x_i^{-1}k_0^{-1}\cdot\delta\cdot kx_i)dk_0dk.$$

Pour $i=1,\dots,n$ et $\delta\in H^\natural$, puisque $x_i^{-1}K_2x_i\subset K_1$, $\phi\in C_{\mathrm{c}}(K_1\backslash G^\natural/K_1)$ et $\omega|_{K_2}=1$, la fonction

$$K\times K\rightarrow\mathbb{C},\;(k_0,k)\mapsto\omega(k)\phi(x_i^{-1}k_0^{-1}\cdot\delta\cdot kx_i)$$

se factorise à travers $K_2\backslash K\times K_2\backslash K$. Par définition de la base $\mathfrak{C}_\circ$, on a

$$\begin{aligned}\Phi(\delta)&=d^2\sum_{i=1}^n\omega(x_i)\Delta_i\sum_{k\in K_2\backslash K}\omega(k)f(x_i^{-1}k^{-1}\cdot\delta\cdot kx_i)\\&=dc^{-1}\sum_{i=1}^n\omega(x_i)\Delta_G(x_i)\int_K\omega(k)\phi(x_i^{-1}k^{-1})\cdot\delta\cdot kx_i)dk\\&=dc^{-1}\int_{\Omega'}\omega(g)\phi(g^{-1}\cdot\delta\cdot g)d_lg\\&=d\frac{\mathrm{vol}(K',d_rh)}{\mathrm{vol}(K',d_lh)}\phi_{\Omega'}(\delta).\end{aligned}$$

Or $K'=H\cap K$ est un groupe compact, par conséquent $d_rh|_{K'}=d_lh|_{K'}$ et $\Phi(\delta)=d\phi_{\Omega'}(\delta)$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})&=\sum_{w\in\mathfrak{B}}\int_H\phi_{\Omega'}(\delta)\langle\Sigma(\delta)(w),\check{w}\rangle d_l\delta\\&=\sum_{w\in\mathfrak{B}}\langle\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural}d_l\delta)(w),\check{w}\rangle.\end{aligned}$$

Posons $e_{K_2'}=\mathrm{vol}(K_2',d_lh)^{-1}\mathbf{1}_{K_2'}$. Puisque $\phi_{\Omega'}|_{H^\natural}\in C_{\mathrm{c}}(K_2'\backslash H^\natural/K_2')$ et $\omega|_{K_2'}=1$, on a

$$\sigma(e_{K_2'})\circ\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural})\circ\sigma(e_{K_2'})=\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural}).$$

En particulier, $\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural})(W)\subset W^{K_2'}$ et $\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural})(W(K_2'))=0$, par conséquent $\Theta_\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural})$ coïncide avec la trace de l'opérateur $\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural})$ sur $W^{K_2'}$. On a donc bien

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})=\Theta_\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural}),$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Cela achève la démonstration de la proposition. $\square$

Corollaire. — *On suppose qu'il existe un sous–groupe ouvert compact K de G tel que $G=HK$. Soit Σ une ω–représentation admissible de $H^\natural$, et soit $\Pi={}^\omega\mathrm{ind}_{H^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)$. Pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural)$, on a la formule de descente*

$$\Theta_\Pi(\phi)=\Theta_\Sigma(\phi_K|_{H^\natural}).$$

Remarque 2. — On suppose que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées. Soit K un sous–groupe ouvert compact de G tel que $HK=KH$. Choisissons un système de représentants $\{x_1=1,x_2,\dots,x_n\}$ dans G de l'espace quotient $HK\backslash G$, et posons $\Omega'=\bigcup_{i=1}^nKx_i$ (l'union est disjointe). Alors Ω' vérifie (iii), et pour $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$ et $\gamma\in G^\natural$, on a

$$\begin{aligned}\phi_{\Omega'}(\gamma)&=\mathrm{vol}(H\cap K,d_lh)^{-1}\int_{\Omega'}\omega(g)\phi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot g)d_lg\\&=\sum_{i=1}^n\omega(x_i)\Delta_G(x_i)({}^{x_i}\phi)_K(\gamma).\end{aligned}$$

Notons que si le groupe HK est θ–stable (ce qui n'implique pas que K soit θ–stable), alors on peut choisir les x_i de telle manière que l'ensemble $\{x_1=1,\dots,x_n\}$ soit θ–stable. En effet, le groupe $\langle\theta\rangle = \langle\theta^i : i\in\mathbb{Z}\rangle$ opère sur l'espace quotient $HK\backslash G$, et pour chaque $\langle\theta\rangle$–orbite $\mathcal{O}$ dans $HK\backslash G$, il existe un $x\in G$ tel que $\mathcal{O} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} HK\theta^i(x)$ (l'union est finie). ■

Remarque 3. — Continuons avec les notations de la remarque 2. On peut, dans la proposition, remplacer Ω' par n'importe quelle partie Ω de G de la forme $\Omega = \bigcup_{j=1}^m y_j\Omega'$ pour des éléments $y_1,\ldots,y_m\in H$: pour toute fonction $\phi\in C_c^\infty(G^\natural)$, on a encore

$$\Theta_\Pi(\phi) = \Theta_\Sigma(\phi_\Omega|_{H^\natural}).$$

En effet, on peut supposer que pour $j,\, k\in\{1,\ldots,m\}$ tels que $j\neq k$, on a $y_j\Omega'\neq y_k\Omega'$. Alors l'union $\bigcup_{j=1}^m y_j\Omega'$ est disjointe : si $y_j\Omega'\cap y_k\Omega'\neq\emptyset$ pour des entiers $j,\, k\in\{1,\ldots,m\}$, alors $y_jKx_i\cap y_kKx_l$ pour des entiers $i,\, l\in\{1,\ldots,n\}$. On a donc $i=l$ et $y_jK = y_kK$, d'où $y_j\Omega' = y_k\Omega'$ puisque $K\Omega'=\Omega'$, et $j=k$. Posons $K' = H\cap\Omega'$ ($= H\cap K$). Alors pour $\delta\in H^\natural$, on a

$$\begin{aligned}\phi_\Omega(h) &= \mathrm{vol}(H\cap\Omega, d_rh)^{-1}\sum_{j=1}^m\int_{y_j\Omega'}\omega(g)\phi(g^{-1}\cdot\delta\cdot g)d_lg\\ &= \frac{\mathrm{vol}(K',d_rh)}{\mathrm{vol}(H\cap\Omega,d_rh)}\sum_{j=1}^m\omega(y_j)\phi_{\Omega'}(y_j^{-1}\cdot\delta\cdot y_j).\end{aligned}$$

Or pour $\xi\in C_c^\infty(H^\natural)$ et $y\in H$, on a (relation $(*)$ de 2.6)

$$\Theta_\Sigma({}^y\xi) = \Delta_H(y^{-1})\omega(y^{-1})\Theta_\Sigma(\xi).$$

Par suite, posant $c = \frac{\mathrm{vol}(K',d_rh)}{\mathrm{vol}(H\cap\Omega,d_rh)}\sum_{j=1}^m\Delta_H(y_j^{-1})$, on obtient

$$\Theta_\Sigma(\phi_\Omega|_{H^\natural}) = c\,\Theta_\Sigma(\phi_{\Omega'}|_{H^\natural}).$$

Mais comme

$$H\cap\Omega = \coprod_{j=1}^m H\cap y_j\Omega' = \coprod_{j=1}^m y_jK',$$

on a

$$\mathrm{vol}(H\cap\Omega,d_rh) = \sum_{j=1}^m\mathrm{vol}(y_jK',d_rh) = \sum_{j=1}^m\Delta_G(y_j^{-1})\mathrm{vol}(K',d_lh).$$

Donc $c=1$. ■

2.9. Commentaires. — La proposition et son corollaire *ne dépendent pas* du choix du point–base $\delta_1\in G^\natural$ — rappelons que l'approche classique consiste à fixer l'automorphisme θ de G et à étudier les caractères θ–tordus, ou plus généralement (θ,ω)–tordus, de G — cf. 2.3. Remplacer δ_1 par $\delta_1' = x\cdot\delta_1$ pour un $x\in G$, revient à remplacer $\theta = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$ par $\theta' = \mathrm{Int}_G(x)\circ\theta$. Nous n'avons pas fait d'hypothèse sur l'ordre de θ, ni sur l'existence d'une partie ouverte (non vide !) compacte de G qui soit θ–stable ; mais l'on pourrait essayer de choisir δ_1 de telle manière que soit vérifiée l'une ou l'autre des conditions suivantes :

(a) L'automorphisme θ est d'ordre fini.

(b) Pour tout sous–groupe ouvert compact K de G, le sous–groupe $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}}\theta^i(K)$ de G est ouvert.

(c) Il existe une base de voisinages de 1 dans G formée de sous–groupes ouverts compacts θ–stables.

(d) Il existe un sous–groupe ouvert compact θ–stable de G.

(e) Il existe une partie ouverte compacte non vide θ–stable de G.

On a les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$. Signalons quelques propriétés :

Si θ est d'ordre fini, alors toute partie compacte Ω de G est contenue dans une partie ouverte compacte θ–stable $\widetilde{\Omega}$ de G. En effet, il suffit de prendre $\widetilde{\Omega} = (\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \theta^i(\Omega))K$ pour un sous–groupe ouvert compact θ–stable K de G.

Si K est un sous–groupe ouvert compact de G, et si K' est un sous–groupe ouvert de K, alors $K'' = \bigcap_{k\in K} k^{-1}K'k$ est un sous–groupe ouvert distingué de K. Si de plus K et K' sont θ–stables, alors K'' l'est aussi. On en déduit que si la condition (c) est vérifiée, alors pour tout sous–groupe ouvert compact θ–stable de G, il existe une base de voisinages de 1 dans G formée de sous–groupes ouverts θ–stables distingués de K.

Les conditions (d) et (e) sont équivalentes. En effet, il s'agit de montrer l'implication $(e) \Rightarrow (d)$. Soit U une partie ouverte compacte non vide θ–stable de G. Pour tout $x \in U$, il existe un sous–groupe ouvert compact K_x de G tel que $K_x x \subset U$. Par compacité, on peut écrire U comme réunion finie d'ensembles $K_{x_i}x_i$ pour des éléments $x_1, \ldots, x_n \in U$. Posons $K = \bigcap_{i=1}^n K_{x_i}$. C'est encore un sous–groupe ouvert compact de G, et on a $KU = U$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, puisque $\theta^j(U) = U$, on a aussi $\theta^j(K)U = U$. Mais alors, le sous–groupe K' de G engendré par les $\theta^j(K)$ pour $j \in \mathbb{Z}$ vérifie encore $K'U = U$. A fortiori on a $K' \subset UU^{-1}$, et comme UU^{-1} est compact, K' l'est aussi. Le groupe K' est ouvert compact et θ–stable.

3. Automorphismes d'un groupe réductif connexe

Dans ce chapitre, on fixe un corps commutatif F et une clôture algébrique $\overline{F}$ de F. On note $p \geq 1$ l'exposant caractéristique de F ; i.e. $p = 1$ si la caractéristique $\mathrm{car}(F)$ de F est nulle, et $p = \mathrm{car}(F)$ sinon. Si $p > 1$, on note $F^{p^{-\infty}}$ la clôture radicielle de F dans $\overline{F}$. La référence adoptée est le livre de Borel [**Bor**]. Toutes les variétés algébriques considérées sont supposées définies sur $\overline{F}$, et sont identifiées à leur ensemble de points $\overline{F}$–rationnels. Les notions topologiques se réfèrent toujours à la topologie de Zariski. On fixe un groupe algébrique affine $\mathbf{H}$, que l'on supposera réductif connexe à partir de 3.5.

3.1. Groupes algébriques affines ; généralités. — Soit $\mathbf{H}^\circ$ la composante neutre du groupe $\mathbf{H}$; c'est un sous–groupe fermé distingué d'indice fini de $\mathbf{H}$ [**Bor**, ch. I, 1.2]. On note $R(\mathbf{H}) = R(\mathbf{H}^\circ)$ et $R_{\mathrm{u}}(\mathbf{H}) = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{H}^\circ)$ le radical et le radical unipotent de $\mathbf{H}^\circ$ [**Bor**, ch. IV, 11.21]. Par définition, $R(\mathbf{H})$ est un sous–groupe fermé distingué de $\mathbf{H}$, connexe et résoluble. D'autre part, comme $R_{\mathrm{u}}(\mathbf{H})$ est l'ensemble des éléments unipotents de $R(\mathbf{H})$, d'après [**Bor**, ch. III, 10.6], $R_{\mathrm{u}}(\mathbf{H})$ est un sous–groupe fermé distingué de $\mathbf{H}$, connexe et unipotent.

Soit $\mathbf{H}'$ un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}$. On note $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}')$ et $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}')$ le centralisateur et le normalisateur de $\mathbf{H}'$ dans $\mathbf{H}$ [**Bor**, ch. I, 1.7] ; ce sont des sous–groupes fermés de $\mathbf{H}$. On note $Z(\mathbf{H})$ le centre $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H})$ de $\mathbf{H}$. Le quotient $\mathbf{H}/\mathbf{H}'$ existe [**Bor**, ch. II, 6.8], i.e. il existe un *morphisme quotient* $\mathbf{H} \to \mathbf{H}/\mathbf{H}'$ au sens de [**Bor**, ch. II, 6.1], dont les fibres sont les classes $h\mathbf{H}'$ pour $h \in \mathbf{H}$. De plus on a [**Bor**, ch. II, 6.8] :

- le quotient $\mathbf{H}/\mathbf{H}'$ est une variété algébrique lisse quasi–projective ;
- si $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}'$ sont définis sur F, alors $\mathbf{H}/\mathbf{H}'$ l'est aussi, i.e. le morphisme quotient $\mathbf{H} \to \mathbf{H}/\mathbf{H}'$ est défini sur F ;
- si $\mathbf{H}'$ est distingué dans $\mathbf{H}$, alors $\mathbf{H}/\mathbf{H}'$ est un groupe algébrique affine.

En particulier, le quotient $\mathbf{H}/\mathbf{H}^\circ$ est un groupe algébrique affine (fini).

On note $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}) = \mathrm{Lie}(\mathbf{H}^\circ)$ l'algèbre de Lie [5] de $\mathbf{H}$, i.e. l'espace tangent $\mathrm{T}(\mathbf{H})_1 = \mathrm{T}(\mathbf{H}^\circ)_1$ de $\mathbf{H}$ au point 1 muni de sa structure naturelle d'algèbre de Lie restreinte [**Bor**, ch. I, 3.5], et l'on pose $\mathfrak{H} = \mathrm{Lie}(\mathbf{H})$.

Soit $\phi : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ un morphisme de groupes algébriques, avec $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ affines. Il induit par restriction un morphisme de groupes algébriques $\phi^\circ : \mathbf{H}_1^\circ \to \mathbf{H}_2^\circ$. Le noyau $\ker(\phi)$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}_1$, et l'image $\phi(\mathbf{H}_1)$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}_2$; de plus on a l'égalité [**Bor**, ch. I, 1.4]

$$\phi(\mathbf{H}_1)^\circ = \phi(\mathbf{H}_1^\circ).$$

On note $\mathrm{Lie}(\phi) = \mathrm{Lie}(\phi^\circ)$ la différentielle $\mathrm{d}(\phi)_1 : \mathrm{Lie}(\mathbf{H}_1) \to \mathrm{Lie}(\mathbf{H}_2)$ de ϕ au point 1 ; c'est un morphisme d'algèbres de Lie.

Soit $\mathbf{V}$ une variété algébrique non vide (a priori ni affine, ni lisse) supposée munie d'une action algébrique de $\mathbf{H}$ disons à gauche [6] $\mathbf{H} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $(h, v) \mapsto h \cdot v$, et soit $v \in \mathbf{V}$. D'après [**Bor**, ch. I, 1.8], l'orbite

$$\mathbf{H} \cdot v = \{h \cdot v : h \in \mathbf{H}\}$$

est une variété algébrique lisse, localement fermée dans $\mathbf{V}$. Notons

$$\mathbf{H}_v = \{h \in \mathbf{H} : h \cdot v = v\}$$

le stabilisateur de v dans $\mathbf{H}$; c'est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}$. Le morphisme de variétés algébriques $\pi_v : \mathbf{H} \to \mathbf{H} \cdot v$, $h \mapsto h \cdot v$ induit, par passage au quotient, un morphisme bijectif de variétés algébriques $\bar{\pi}_v : \mathbf{H}/\mathbf{H}_v \to \mathbf{H} \cdot v$, qui *n'est en général pas* un isomorphisme. Précisément, notant $\mathrm{T}(\mathbf{H} \cdot v)_v$ l'espace tangent de $\mathbf{H} \cdot v$ au point v, et $\mathrm{d}(\pi_v)_1 : \mathfrak{H} \to \mathrm{T}(\mathbf{H} \cdot v)_v$ la différentielle de π_v au point 1, on a les inclusions

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_v) \subset \ker(\mathrm{d}(\pi_v)_1), \quad \mathrm{d}(\pi_v)_1(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{T}(\mathbf{H} \cdot v)_v.$$

D'après [**Bor**, ch. AG, 10.1], on a l'égalité

$$(*) \qquad \dim(\mathbf{H}) = \dim(\mathbf{H}_v) + \dim(\mathbf{H} \cdot v).$$

On en déduit que les conditions suivantes sont équivalentes [**Bor**, ch. II, 6.7] :

– $\bar{\pi}_v$ est un isomorphisme de variétés algébriques, i.e. l'orbite $\mathbf{H} \cdot v$ est « le » quotient de $\mathbf{H}$ par $\mathbf{H}_v$;
– π_v est séparable ;
– $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_v) = \ker(\mathrm{d}(\pi_v)_1)$;
– $\mathrm{d}(\pi_v)_1(\mathfrak{H}) = \mathrm{T}(\mathbf{H} \cdot v)_v$.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit aussi [7] que le morphisme $\mathbf{H} \to \mathbf{V}$, $h \mapsto h \cdot v$ est séparable. Notons que si $p = 1$, alors π_v est toujours séparable.

Exemples. — (1) Soit $\mathbf{H}'$ un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}$. Alors (par définition du quotient $\mathbf{H}/\mathbf{H}'$) le morphisme quotient $\pi : \mathbf{H} \to \mathbf{H}/\mathbf{H}'$ est surjectif, ouvert et séparable : on a l'égalité $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}') = \ker(\mathrm{d}(\pi)_1)$.

(2) Soit $\phi : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ un morphisme de groupes algébriques affines. Par passage au quotient, ϕ induit un morphisme de groupes algébriques $\bar{\phi} : \mathbf{H}_1/\ker(\phi) \to \phi(\mathbf{H}_1)$, qui est un isomorphisme de groupes abstraits mais *n'est en général pas* un isomorphisme de groupes algébriques. Précisément, on a l'inclusion $\mathrm{Lie}(\ker(\phi)) \subset \ker(\mathrm{Lie}(\phi))$ avec égalité si et seulement si ϕ est séparable, i.e. si et seulement si $\bar{\phi}$ est un isomorphisme de groupes algébriques. ■

5. Dans [**Bor**, ch. I, 3.5], l'algèbre de Lie de $\mathbf{H}$ est notée $L(\mathbf{H})$.
6. Le même discours s'applique bien sûr aussi à une action à droite.
7. Contrairement à l'usage, qui est de réserver l'adjectif *séparable* aux morphismes dominants.

Considérons la représentation adjointe $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}} : \mathbf{H} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{H})$, définie par

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)) \quad (h \in \mathbf{H}).$$

Posons $\mathbf{H}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(\mathbf{H})$ et $\mathrm{ad}_{\mathbf{H}} = \mathrm{Lie}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{H})$. Considérons aussi le groupe quotient $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}/Z(\mathbf{H})$, et notons $\pi : \mathbf{H} \rightarrow \overline{\mathbf{H}}$ le morphisme quotient. D'après la propriété universelle du quotient [**Bor**, ch. II, 6.3], il existe un *unique* morphisme de variétés algébriques $\beta : \overline{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbf{H}_{\mathrm{ad}}$ tel que $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}} = \beta \circ \pi$. De plus, β est un morphisme de groupes algébriques, et puisque π est séparable, $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}$ est séparable si et seulement si β est séparable.

Exemples. — (3) Soit $\mathbf{H} = \mathbb{SL}_2$. Si $p = 2$, alors $Z(\mathbf{H}) = \{1\}$, $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ et $\mathbf{H}_{\mathrm{ad}} = \mathbb{PGL}_2$. De plus (toujours si $p = 2$), le morphisme $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_{\mathrm{ad}}$ est un isomorphisme de groupes abstraits, mais il n'est pas séparable.

(4) Si $p = 1$ ou si $\mathbf{H}$ est connexe et semisimple, on a toujours l'égalité $Z(\mathbf{H}) = \ker(\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}})$.

(5) Supposons $p > 1$, et reprenons l'exemple de Chevalley décrit dans [**Bor**, ch. I, 3.15]. Soit $\mathbf{H}$ le sous–groupe fermé de $\mathbb{GL}_3$ formé des matrices

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x^p & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (x \in \overline{F}^{\times},\ y \in \overline{F}).$$

On a $\varphi(x,y)\varphi(x',y') = \varphi(xx', x^p y' + y)$ et $\varphi(x,y)^{-1} = \varphi(x^{-1}, -x^{-p}y)$, d'où

$$(*) \qquad \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(\varphi(x,y))(\varphi(x',y')) = (x', (1 - x'^p)y + x^p y').$$

En particulier le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{a}} = \varphi(1, \overline{F}) \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ est distingué dans $\mathbf{H}$, et comme

$$\varphi(x,y) = \varphi(x,0)\varphi(1,y) \quad (x \in \overline{F}^{\times},\ y \in \overline{F}),$$

posant $\mathbf{H}_{\mathrm{m}} = \varphi(\overline{F}^{\times}, 0) \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, on a la décomposition en produit semidirect

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathrm{m}} \ltimes \mathbf{H}_{\mathrm{a}}.$$

Grâce à l'égalité $(*)$, on obtient que $Z(\mathbf{H}) = \{1\}$ et $\ker(\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}) = \mathbf{H}_{\mathrm{a}}$. D'autre part (à nouveau grâce à $(*)$), l'application commutateur $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $(h, h') \mapsto c_h(h') = hh'h^{-1}h'^{-1}$ est donnée par

$$c_{\varphi(x,y)}(\varphi(x',y')) = (1, (1 - x'^p)y - (1 - x^p)y').$$

On en déduit que l'algèbre de Lie de $\mathbf{H}$ est commutative (bien que $\mathbf{H}$ ne soit pas commutatif). Par suite l'inclusion

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_{\mathrm{a}}) = \mathrm{Lie}(\ker(\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}})) \subset \ker(\mathrm{ad}_{\mathbf{H}}) = \mathfrak{H}$$

est stricte, et $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}$ n'est pas séparable. ■

3.2. Automorphismes. — Appelons *$\overline{F}$–automorphisme de* $\mathbf{H}$ un automorphisme du groupe algébrique $\mathbf{H}$. On note $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ le groupe des $\overline{F}$–automorphismes de $\mathbf{H}$, et $\mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ le sous–groupe distingué de $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ formé des automorphismes intérieurs, i.e. ceux qui sont de la forme $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) : x \mapsto hxh^{-1}$ pour un $h \in \mathbf{H}$. L'application $\mathbf{H} \rightarrow \mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$, $h \mapsto \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$ se factorise en un isomorphisme de groupes abstraits $\overline{\mathbf{H}} \rightarrow \mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Notons que pour $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ et $h,\, x \in \mathbf{H}$, on a

$$(*) \qquad \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x^{-1}) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x^{-1}h\tau(x)) \circ \tau.$$

On note $\mathrm{Out}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ le groupe quotient $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})/\mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$, et $\mathrm{Aut}^0_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ le sous–groupe de $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ formé des automorphismes dont l'image dans $\mathrm{Out}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ est d'ordre fini.

Si $\mathbf{H}$ est défini sur F, on note $\mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ le groupe des F–automorphismes de $\mathbf{H}$, i.e. le sous–groupe de $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ formé des automorphismes qui sont définis sur F, et l'on pose

$$\mathrm{Aut}_F^0(\mathbf{H}) = \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}) \cap \mathrm{Aut}_{\overline{F}}^0(\mathbf{H}),$$

$$\mathrm{Int}_F(\mathbf{H}) = \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}) \cap \mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H}).$$

Si $\mathbf{H}$ et $Z(\mathbf{H})$ sont définis sur F, alors $\overline{\mathbf{H}}$ l'est aussi [**Bor**, ch. II, 6.8], et via l'identification $\mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) = \overline{\mathbf{H}}$, $\mathrm{Int}_F(\mathbf{H})$ coïncide avec le groupe $\overline{\mathbf{H}}(F)$ des points F–rationnels de $\overline{\mathbf{H}}$.

Remarques. — (1) Si $\mathbf{H}$ est réductif connexe, on verra plus loin (3.5) que la projection canonique $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) \rightarrow \mathrm{Out}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ est scindée.

(2) Si $\mathbf{H}$ est un tore, alors on a $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) = \mathrm{Out}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) \simeq GL(\mathrm{X}^*(\mathbf{H}))$ où $\mathrm{X}^*(\mathbf{H})$ désigne le groupe des caractères algébriques de $\mathbf{H}$. En particulier si $\mathbf{H}$ est un tore de dimension 1, alors le seul $\overline{F}$–automorphisme non trivial de $\mathbf{H}$ est le passage à l'inverse $t \mapsto t^{-1}$.

(3) Si $\mathbf{H}$ est un tore défini et déployé sur F, alors on a $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) = \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$. ■

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Par restriction, τ induit un $\overline{F}$–automorphisme de $\mathbf{H}^\circ$, que l'on note τ°. L'ensemble $\mathbf{H}_\tau = \{h \in \mathbf{H} : \tau(h) = h\}$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}$, et $\mathbf{H}_\tau^\circ = (\mathbf{H}_\tau)^\circ$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}^\circ$ qui coïncide avec $(\mathbf{H}^\circ)_{\tau^\circ}^\circ$. Notons $1-\tau : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ le morphisme de variétés algébriques $h \mapsto h\tau(h)^{-1}$, et posons

$$\mathbf{H}(1-\tau) = \{h\tau(h)^{-1} : h \in \mathbf{H}\} \ (= \{h^{-1}\tau(h) : h \in \mathbf{H}\}).$$

D'après 3.1, $\mathbf{H}(1-\tau)$ est une variété algébrique lisse, localement fermée dans $\mathbf{H}$. Remarquons que si $\mathbf{H}$ est commutatif, alors $1-\tau$ est un morphisme de groupes algébriques, $\mathbf{H}_\tau = \ker(1-\tau)$, et $\mathbf{H}(1-\tau) = \mathrm{Im}(1-\tau)$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}$. Revenons au cas général. Par passage au quotient, $1-\tau$ induit un morphisme bijectif de variétés algébriques

$$\overline{1-\tau} : \mathbf{H}/\mathbf{H}_\tau \rightarrow \mathbf{H}(1-\tau),$$

qui n'est en général pas un isomorphisme. Posons $\mathfrak{H}_\tau = \ker(\mathrm{id}_{\mathfrak{H}} - \mathrm{Lie}(\tau))$. À nouveau d'après ce qui précède, on a l'inclusion $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_\tau) \subset \mathfrak{H}_\tau$ avec égalité si et seulement si $1-\tau$ est séparable, i.e. si et seulement si $\overline{1-\tau}$ est un isomorphisme de variétés algébriques.

Si $\mathbf{J}$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}$ tel que $\tau(\mathbf{J}) = \mathbf{J}$, alors la restriction $\sigma = \tau|_{\mathbf{J}}$ appartient à $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{J})$, et l'on pose $\mathbf{J}_\tau = \mathbf{J}_\sigma$, $\mathbf{J}_\tau^\circ = \mathbf{J}_\sigma^\circ$, $\mathbf{J}(1-\tau) = \mathbf{J}(1-\sigma)$, (etc.). Pour $h \in \mathbf{H}$ et $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$, on a $\tau^\circ = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\circ}(h)$, et l'on pose $\mathbf{H}_h = \mathbf{H}_\tau$ et $\mathbf{H}_h^\circ = \mathbf{H}_\tau^\circ$.

Puisque $\mathbf{H}$ est affine, pour $h \in \mathbf{H}$, on a la *décomposition de Jordan* [**Bor**, ch. I, 4.4]

$$h = h_{\mathrm{s}} h_{\mathrm{u}}$$

avec $h_{\mathrm{s}} \in \mathbf{H}$ semisimple, $h_{\mathrm{u}} \in \mathbf{H}$ unipotent, et $h_{\mathrm{u}} \in \mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}$; cette décomposition est *unique*. En particulier, pour $h \in \mathbf{H}$, l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$ de $\mathbf{H}$ se décompose en

$$\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{s}}) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{u}}) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{u}}) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{s}}).$$

Si de plus $\mathbf{H}$ est défini sur F, alors d'après loc. cit., pour $h \in \mathbf{H}(F)$, les éléments h_{s} et h_{u} appartiennent à $\mathbf{H}(F^{p^{-\infty}})$, par conséquent les automorphismes $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{s}})$ et $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{u}})$ de $\mathbf{H}$ sont définis sur $F^{p^{-\infty}}$.

Remarques. — (4) Pour $h \in \mathbf{H}^\circ$, on a h_{s}, $h \in \mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}^\circ$ [**Bor**, ch. IV, 11.12] donc $h_{\mathrm{u}} \in \mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}^\circ$.

(5) Supposons $p = 1$. Puisque le groupe algébrique affine $\mathbf{H}/\mathbf{H}^\circ$ est fini, il est formé d'éléments semisimples. Par conséquent tout élément unipotent de $\mathbf{H}$ appartient à $\mathbf{H}^\circ$. En particulier pour $h \in \mathbf{H}$, on a $h_{\mathrm{u}} \in \mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}^\circ$. ■

3.3. Groupes diagonalisables et tores. — On note $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ le groupe algébrique affine $\overline{F}^{\times}$, et pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on pose $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^k = \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \cdots \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ (k fois). Soit $\mathbf{D}$ un *groupe diagonalisable*, c'est–à–dire un groupe algébrique affine isomorphe à un sous–groupe fermé de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^k$ pour un entier $k \geq 1$. On appelle *caractère algébrique de* $\mathbf{D}$ un morphisme de groupes algébriques $\mathbf{D} \rightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. On note $\mathrm{X}^*(\mathbf{D})$ le groupe des caractères algébriques de $\mathbf{D}$. C'est un $\mathbb{Z}$–module de type fini, sans p–torsion si $p > 1$, et l'on a une identification canonique :

$$\mathbf{D} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}^*(\mathbf{D}), \overline{F}^{\times}).$$

Tout sous–groupe fermé de $\mathbf{D}$ est un groupe diagonalisable. Pour tout morphisme de groupes algébriques $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{H}$, l'image $\phi(\mathbf{D})$ est un groupe diagonalisable. En particulier, pour tout sous–groupe fermé $\mathbf{D}'$ de $\mathbf{D}$, le quotient $\mathbf{D}/\mathbf{D}'$ est un groupe diagonalisable, de groupe des caractères

$$\mathrm{X}^*(\mathbf{D}/\mathbf{D}') = \{\chi \in \mathrm{X}^*(\mathbf{D}) : \chi|_{\mathbf{D}'} = \mathrm{id}\}.$$

La composante neutre $\mathbf{D}^\circ$ de $\mathbf{D}$ est un tore, de groupe des caractères algébriques

$$\mathrm{X}^*(\mathbf{D}^\circ) = \mathrm{X}^*(\mathbf{D})/\mathrm{X}^*(\mathbf{D})_{\mathrm{tor}},$$

où $\mathrm{X}^*(\mathbf{D})_{\mathrm{tor}}$ désigne le sous–module de torsion de $\mathrm{X}^*(\mathbf{D})$. On a $\mathrm{X}^*(\mathbf{D}/\mathbf{D}^\circ) = \mathrm{X}^*(\mathbf{D})_{\mathrm{tor}}$, et d'après [**Bor**, ch. III, 8.7], il existe un sous–groupe fermé *fini* $\boldsymbol{\Omega}$ de $\mathbf{D}$ tel que le morphisme produit $\mathbf{D}^\circ \times \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \mathbf{D}$ est un isomorphisme de groupes algébriques. Notons que pour tout morphisme de groupes algébriques $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{H}$, le groupe $\phi(\mathbf{D}^\circ) = \phi(\mathbf{D})^\circ$ est un tore.

Soit $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$ un morphisme de groupes algébriques, avec $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ diagonalisables. Il induit un morphisme de $\mathbb{Z}$–modules

$$\phi^\sharp : \mathrm{X}^*(\mathbf{D}') \rightarrow \mathrm{X}^*(\mathbf{D}),\ \chi' \mapsto \chi \circ \phi.$$

Cela définit un foncteur contravariant de la catégorie des groupes diagonalisables dans celle des $\mathbb{Z}$–modules de type fini. D'après [**Bor**, ch. III, 8.3], ce foncteur est pleinement fidèle. On a $\mathrm{X}^*(\phi(\mathbf{D})) = \mathrm{X}^*(\mathbf{D}')/\ker(\phi^\sharp)$, et $\mathrm{X}^*(\ker(\phi))$ coïncide avec :
- $\mathrm{coker}(\phi^\sharp)$ si $p = 1$;
- le quotient de $\mathrm{coker}(\phi^\sharp)$ par sa p–torsion si $p > 1$.

Si $p > 1$, ϕ est séparable si et seulement si le $\mathbb{Z}$–module $\mathrm{coker}(\phi^\sharp)$ est sans p–torsion.

Exemple. — Soit $\mathbf{T}$ un tore, et soit m un entier ≥ 1. Considérons le morphisme de groupes algébriques $\phi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ défini par $\phi(x) = x^m$. On a :
- $\phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$;
- si $(m, p) = 1$, alors ϕ est séparable et le noyau $\ker(\phi)$ est isomorphe (comme groupe abstrait) à $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\dim(\mathbf{T})}$;
- si $p > 1$ et $m = p^r$ pour un entier r, alors $\ker(\phi) = \{1\}$ et $\mathrm{Lie}(\phi) = 0$. ■

Soit $\mathbf{T}$ un tore, et soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{T})$. Alors $1-\tau$ est un morphisme de groupes algébriques, et puisque le groupe $\mathbf{T}(1-\tau) = \mathrm{Im}(1-\tau)$ est connexe, c'est un tore. Soit $q_\tau : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/\mathbf{T}(1-\tau)$ le morphisme quotient. On a la suite exacte longue de groupes algébriques :

$$1 \rightarrow \mathbf{T}_\tau \rightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{1-\tau} \mathbf{T} \xrightarrow{q_\tau} \mathbf{T}/\mathbf{T}(1-\tau) \rightarrow 1.$$

Posons $\mathfrak{T} = \mathrm{Lie}(\mathbf{T})$. D'après 3.1, on a l'inclusion $\mathrm{Lie}(\mathbf{T}_\tau) \subset \mathfrak{T}_\tau (= \ker(\mathrm{id}_{\mathfrak{T}} - \mathrm{Lie}(\tau)))$ avec égalité si et seulement si $1 - \tau$ est séparable.

Supposons de plus que τ est d'ordre fini m. Alors $(\tau^\sharp)^m$ est l'identité de $\mathrm{X}^*(\mathbf{T})$. Soit $\mathcal{N}_\tau : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ le morphisme de groupes algébriques défini par

$$\mathcal{N}_\tau(t) = t\tau(t) \cdots \tau^{m-1}(t).$$

Puisque $(1-\tau)^\sharp = \mathrm{id} - \tau^\sharp$ et $\mathcal{N}_\tau^\sharp = \mathrm{id} + \tau^\sharp + \cdots + (\tau^\sharp)^{m-1}$, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{id}-\tau^\sharp) \subset \ker(\mathcal{N}_\tau^\sharp)$ et

$$\mathcal{N}_\tau^\sharp(\chi) - m\chi \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}-\tau^\sharp) \quad (\chi \in \mathrm{X}^*(\mathbf{T})).$$

Par suite, le quotient $\ker(\mathcal{N}_\tau^\sharp)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}-\tau^\sharp)$ est un $\mathbb{Z}$–module de torsion d'exposant divisant m. D'autre part, $\mathrm{X}^*(\mathbf{T}_\tau/\mathbf{T}_\tau^\circ) = \mathrm{X}^*(\mathbf{T}_\tau)_{\mathrm{tor}}$ coïncide avec la p'–torsion de $\mathrm{coker}(\mathrm{id}-\tau^\sharp)$; où par *p'–torsion* on entend :

– la torsion si $p=1$;
– le quotient de la torsion par la p–torsion si $p>1$.

Comme $\mathcal{N}_\tau(\mathbf{T})$ est un tore, le quotient $\mathrm{X}^*(\mathbf{T})/\ker(\mathcal{N}_\tau^\sharp) = \mathrm{X}^*(\mathcal{N}_\tau(\mathbf{T}))$ est sans torsion. Par suite $\mathrm{X}^*(\mathbf{T}_\tau/\mathbf{T}_\tau^\circ)$ coïncide avec la p'–torsion de $\ker(\mathcal{N}_\tau^\sharp)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}-\tau^\sharp)$. D'où le

Lemme. — *Soit $\mathbf{T}$ un tore, et soit τ un $\overline{F}$–automorphisme de $\mathbf{T}$ d'ordre fini m. Alors l'exposant de $\mathbf{T}_\tau/\mathbf{T}_\tau^\circ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}(\mathbf{T}_\tau)_{\mathrm{tor}}, \overline{F}^\times)$ divise m.*

Remarque. — Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ et soit $\mathbf{T}$ un tore τ–stable de $\mathbf{H}$. Notons τ' la restriction de τ à $\mathbf{T}$. Puisque $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})^\circ = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})^\circ$ [**Bor**, ch. III, 8.10, cor. 2], le groupe $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})/Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})$ est fini. Par conséquent si $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}^0(\mathbf{H})$, alors τ' est d'ordre fini. ■

3.4. Automorphismes semisimples et unipotents. — Un $\overline{F}$–automorphisme τ de $\mathbf{H}$ est dit *localement fini*[8] s'il existe un morphisme de groupes algébriques

$$\iota : \mathbf{H} \to \mathbb{GL}_n = GL_n(\overline{F})$$

qui soit un isomorphisme (de groupes algébriques) de $\mathbf{H}$ sur un sous–groupe fermé de $\mathbb{GL}_n$, et un élément $g \in \mathbb{GL}_n$, tels que pour tout $h \in \mathbf{H}$, on ait $\iota\circ\tau(h) = g\iota(h)g^{-1}$.

Soit τ un $\overline{F}$–automorphisme localement fini de $\mathbf{H}$. On définit comme suit la *décomposition de Jordan* $\tau = \tau_{\mathrm{s}}\circ\tau_{\mathrm{u}}$ de τ. Choisissons $\iota : \mathbf{H} \to \mathbb{GL}_n$ et g comme ci-dessus, et posons $\mathbf{H}^\iota = \iota(\mathbf{H}) \subset \mathbb{GL}_n$. Soit $g = g_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{u}}$ la décomposition de Jordan de g (dans $\mathbb{GL}_n$). Puisque $g \in N_{\mathbb{GL}_n}(\mathbf{H}^\iota)$ et que $N_{\mathbb{GL}_n}(\mathbf{H}^\iota)$ est un sous–groupe fermé de $\mathbb{GL}_n$, on a $g_{\mathrm{s}}, g_{\mathrm{u}} \in N_{\mathbb{GL}_n}(\mathbf{H}^\iota)$. Notons τ_{s}^ι et τ_{u}^ι les éléments de $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}^\iota)$ déduit de $\mathrm{Int}_{\mathbb{GL}_n}(g_{\mathrm{s}})$ et $\mathrm{Int}_{\mathbb{GL}_n}(g_{\mathrm{u}})$ par restriction, et posons $\tau_{\mathrm{s}} = \iota^{-1}\circ\tau_{\mathrm{s}}^\iota\circ\iota$ et $\tau_{\mathrm{u}} = \iota^{-1}\circ\tau_{\mathrm{u}}^\iota\circ\iota$. Les $\overline{F}$–automorphismes τ_{s} et τ_{u} de $\mathbf{H}$ sont bien définis, i.e. ils ne dépendent pas des choix de ι et g. En effet, fixé ι, l'image $\bar{g}$ de g dans le groupe algébrique affine $\overline{\mathbf{H}}^\iota = N_{\mathbb{GL}_n}(\mathbf{H}^\iota)/Z_{\mathbb{GL}_n}(\mathbf{H}^\iota)$ est déterminée de manière unique par τ, et si $\bar{g} = \bar{g}_{\mathrm{s}}\bar{g}_{\mathrm{u}}$ est la décomposition de Jordan de $\bar{g}$ dans $\overline{\mathbf{H}}^\iota$, alors $\mathrm{Int}_{\overline{\mathbf{H}}^\iota}(\bar{g}_{\mathrm{s}})$ et $\mathrm{Int}_{\overline{\mathbf{H}}^\iota}(\bar{g}_{\mathrm{u}})$ définissent des $\overline{F}$–automorphismes de $\mathbf{H}^\iota$, qui coïncident avec τ_{s}^ι et τ_{u}^ι ; d'où l'indépendance par rapport au choix de g. Si maintenant $\iota_1 : \mathbf{H} \to \mathbb{GL}_m$ est un autre morphisme de groupes algébriques qui soit un isomorphisme sur un sous–groupe fermé $\mathbf{H}^{\iota_1}$ de $\mathbb{GL}_m$, et si g_1 est un élément de $\mathbb{GL}_m$ tel que $\iota_1\circ\tau(h) = g_1\iota(h)g_1^{-1}$ pour tout $h \in \mathbf{H}$, alors en notant $\jmath : \mathbf{H} \to \mathbb{GL}_{n+m}$ le morphisme composé du morphisme produit $\iota\times\iota_1 : \mathbf{H} \to \mathbb{GL}_n \times \mathbb{GL}_m$ et du morphisme diagonal par blocs $\delta : \mathbb{GL}_n \times \mathbb{GL}_m \to \mathbb{G}_{n+m}$, on a $\jmath\circ\tau(h) = \delta(g\iota(h)g^{-1}, g_1\iota_1(h)g_1^{-1})$ pour tout $h \in \mathbf{H}$. Par conséquent $\tau_{\mathrm{s}}^\jmath = \delta\circ(\tau_{\mathrm{s}}^\iota\times\tau_{\mathrm{s}}^{\iota_1})\circ\delta^{-1}$ et $\tau_{\mathrm{u}}^\jmath = \delta\circ(\tau_{\mathrm{u}}^\iota\times\tau_{\mathrm{u}}^{\iota_1})\circ\delta^{-1}$. On en déduit que $\iota_1^{-1}\circ\tau_{\mathrm{s}}^{\iota_1}\circ\iota_1 = \iota^{-1}\circ\tau_{\mathrm{s}}^\iota\circ\iota$ et $\iota_1^{-1}\circ\tau_{\mathrm{u}}^{\iota_1}\circ\iota_1 = \iota^{-1}\circ\tau_{\mathrm{u}}^\iota\circ\iota$.

Par construction, on a la décomposition $\tau = \tau_{\mathrm{s}}\circ\tau_{\mathrm{u}} = \tau_{\mathrm{u}}\circ\tau_{\mathrm{s}}$, et τ_{s} et τ_{u} sont localement finis. Cette décomposition est *unique* (car la décomposition de Jordan de $\bar{g}$ est unique). En particulier, si $\mathbf{J}$ est un sous–groupe fermé τ–stable de $\mathbf{H}$, alors $\tau_{\mathrm{s}}(\mathbf{J}) = \mathbf{J}$ et $\tau_{\mathrm{u}}(\mathbf{J}) = \mathbf{J}$. Enfin si $\mathbf{H}$ est défini sur F et $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$, alors on peut choisir ι défini sur F, et τ_{s} et τ_{u} sont définis sur $F^{p^{-\infty}}$.

8. On peut vérifier que cette notion est équivalente à la suivante (cf. [**Bor**, ch. I, convention pp. 81/82]) : l'algèbre affine $\overline{F}[\mathbf{H}]$ de $\mathbf{H}$ est réunion de sous–espaces $\tau^\sharp$–stables de dimension finie, où $\tau^\sharp$ désigne l'automorphisme de $\overline{F}[\mathbf{H}]$ défini par $\tau^\sharp(f)(h) = f(\tau(h))$ pour $f \in \overline{F}[\mathbf{H}]$ et $h \in \mathbf{H}$.

Pour $h \in \mathbf{H}$, on a bien sûr $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)_{\mathrm{s}} = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{s}})$ et $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)_{\mathrm{u}} = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{u}})$.

Un $\overline{F}$–automorphisme localement fini τ de $\mathbf{H}$ est dit *semisimple* si $\tau = \tau_{\mathrm{s}}$, et il est dit *unipotent* si $\tau = \tau_{\mathrm{u}}$.

Si τ est un $\overline{F}$–automorphisme localement fini de $\mathbf{H}$, alors le $\overline{F}$–automorphisme τ° de $\mathbf{H}^\circ$ est localement fini, et l'on a $(\tau^\circ)_{\mathrm{s}} = (\tau_{\mathrm{s}})^\circ$ et $(\tau^\circ)_{\mathrm{u}} = (\tau_{\mathrm{u}})^\circ$. On peut donc poser $\tau_{\mathrm{s}}^\circ = (\tau_{\mathrm{s}})^\circ$ et $\tau_{\mathrm{u}}^\circ = (\tau_{\mathrm{u}})^\circ$.

Si $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}^0(\mathbf{H}^\circ)$, alors il existe un groupe algébrique affine $\mathbf{H}'$ de composante neutre $\mathbf{H}^\circ$, tel que $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(h')|_{\mathbf{H}^\circ}$ pour un élément $h' \in \mathbf{H}'$; en particulier, τ est localement fini. En effet (voir aussi plus loin, 5.5), soit l l'ordre de l'image de τ dans $\mathrm{Out}_{\overline{F}}(\mathbf{H}^\circ)$. Choisissons un élément $h \in \mathbf{H}^\circ$ tel que $\tau^l = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\circ}(h)$. Notons $\mathbf{H}^\circ \rtimes \langle\tau\rangle$ le produit semidirect (dans la catégorie des groupes) de $\mathbf{H}^\circ$ par le groupe abstrait engendré par τ, et $\mathbf{C}$ le sous–groupe cyclique de $\mathbf{H}^\circ \rtimes \langle\tau\rangle$ engendré par $h^{-1} \rtimes \tau^l$. Alors $\mathbf{C}$ est distingué dans $\mathbf{H}^\circ \rtimes \langle\tau\rangle$, et le groupe quotient $\mathbf{H}' = (\mathbf{H}^\circ \rtimes \langle\tau\rangle)/\mathbf{C}$ est naturellement muni d'une structure de groupe algébrique affine de composante neutre $\mathbf{H}^\circ$. On prend alors pour h' l'image de $1 \rtimes \tau$ dans $\mathbf{H}'$. Soit maintenant $h' = h'_{\mathrm{s}}h'_{\mathrm{u}}$ la décomposition de Jordan de h' dans $\mathbf{H}'$. On a $\tau_{\mathrm{s}} = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(h'_{\mathrm{s}})|_{\mathbf{H}^\circ}$ et $\tau_{\mathrm{s}} = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(h'_{\mathrm{u}})|_{\mathbf{H}^\circ}$.

Remarque 1. — Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Si $p > 1$, alors τ est unipotent si et seulement s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\tau^{p^k} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$. Si $p = 1$ et τ est d'ordre fini, alors τ est toujours semisimple. ■

Remarque 2. — Soit $\mathbf{T}$ un tore. D'après la remarque de 3.3, un $\overline{F}$–automorphisme de $\mathbf{T}$ est localement fini si et seulement s'il est d'ordre fini. Par suite si $p = 1$, tout automorphisme localement fini de $\mathbf{T}$ est semisimple. ■

Proposition. — *Soit $\mathbf{T}$ un tore, et soit τ un $\overline{F}$–automorphisme unipotent de $\mathbf{T}$. Alors $\mathbf{T}_\tau$ est connexe, et le morphisme produit $\mathbf{T}_\tau \times \mathbf{T}(1-\tau) \to \mathbf{T}$ est bijectif.*

Démonstration. — Si $p = 1$, alors $\tau = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ (d'après la remarque 2) et il n'y rien à démontrer. On suppose donc $p > 1$ et $\tau \neq \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$. Alors τ est d'ordre fini p^k pour un entier $k \geq 1$. Puisque $\mathbf{T}_\tau/\mathbf{T}_\tau^\circ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}^*(\mathbf{T}_\tau)_{\mathrm{tor}}, \overline{F}^\times)$ et $\mathrm{X}^*(\mathbf{T}_\tau)$ est sans p–torsion, les éléments de $\mathbf{T}_\tau/\mathbf{T}_\tau^\circ$ sont d'ordre premier à p. Comme d'autre part l'exposant de $\mathbf{T}_\tau/\mathbf{T}_\tau^\circ$ divise p^k (lemme de 3.3), on a $\mathbf{T}_\tau/\mathbf{T}_\tau^\circ = \{1\}$, i.e. $\mathbf{T}_\tau$ est connexe. Notons $\mathcal{N}_\tau$ le morphisme de groupes algébriques $\mathbf{T} \to \mathbf{T}$, $t \mapsto t\tau(t)\cdots\tau^{p^k-1}(t)$. Puisque $\ker(\mathcal{N}_\tau^\sharp)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}-\tau^\sharp)$ est un groupe de p–torsion, on a $\mathcal{N}_\tau(\mathbf{T}) = \ker(1-\tau) = \mathbf{T}_\tau$. De la même manière, comme

$$\mathcal{N}_\tau(t) \equiv t^{p^k} \pmod{\mathbf{T}(1-\tau)} \quad (t \in \mathbf{T}),$$

$\ker(\mathcal{N}_\tau)/\mathbf{T}(1-\tau)$ est un groupe de torsion d'exposant divisant p^k, et donc $\ker(\mathcal{N}_\tau) = \mathbf{T}(1-\tau)$. Puisque $\mathbf{T}_\tau \cap \mathbf{T}(1-\tau) = \{t \in \mathbf{T} : t^{p^k} = 1\}$, on a $\mathbf{T}_\tau \cap \mathbf{T}(1-\tau) = \{1\}$, et le morphisme produit $\mu : \mathbf{T}_\tau \times \mathbf{T}(1-\tau) \to \mathbf{T}$ est injectif. L'image $\mathbf{T}_\tau\mathbf{T}(1-\tau) = \mu(\mathbf{T}_\tau \times \mathbf{T}(1-\tau))$ est un sous–groupe fermé connexe de $\mathbf{T}$; c'est donc un tore. Puisque $\mathbf{T}_\tau = \mathcal{N}_\tau(\mathbf{T})$ et $\mathbf{T}(1-\tau) = \ker(\mathcal{N}_\tau)$, on a

$$\dim(\mathbf{T}_\tau\mathbf{T}(1-\tau)) = \dim(\mathbf{T}_\tau) + \dim(\mathbf{T}(1-\tau)) = \dim(\mathbf{T}),$$

et μ est surjectif. D'où l'égalité $\mathbf{T}_\tau\mathbf{T}(1-\tau) = \mathbf{T}$. □

Remarque. — Soit $\mathbf{T}$ et τ comme dans la proposition. Le morphisme produit

$$\mu : \mathbf{T}_\tau \times \mathbf{T}(1-\tau) \to \mathbf{T}$$

n'est en général pas un isomorphisme de groupes algébriques. En effet, prenons par exemple $p = 2$, $\mathbf{T} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ et $\tau(x,y) = (y,x)$. Puisque $\tau^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{T}}$, τ est unipotent. Pour $(x,y) \in \overline{F}^\times \times \overline{F}^\times$, notant $z \in \overline{F}^\times$ l'élément tel que $xy = z^2$, on a

$$(x,y) = (z,z)(z^{-1}x, zx^{-1}) \in \mathbf{T}_\tau \mathbf{T}(1-\tau).$$

Mais puisque $\mathrm{Lie}(\mathbf{T}_\tau) = \mathrm{Lie}(\mathbf{T}(1-\tau)) = \ker(1+\mathrm{Lie}(\tau))$ est strictement contenu dans $\mathrm{Lie}(\mathbf{T})$, $\mathrm{Lie}(\mu)$ n'est pas bijectif, et μ n'est pas séparable. ■

3.5. Groupes réductifs connexes. — *On suppose désormais, et jusqu'à la fin du ch. 3, que le groupe* $\mathbf{H}$ *est connexe et réductif.* On note $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ le groupe dérivé de $\mathbf{H}$, et $C(\mathbf{H})$ le cocentre $\mathbf{H}/\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ de $\mathbf{H}$. Rappelons que l'on a posé $\mathfrak{H} = \mathrm{Lie}(\mathbf{H})$ et $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}/Z(\mathbf{H})$. On pose aussi $\mathfrak{H}_{\mathrm{der}} = \mathrm{Lie}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$, $\mathfrak{Z} = \mathrm{Lie}(R(\mathbf{H}))$, $\mathfrak{C} = \mathrm{Lie}(C(\mathbf{H}))$ et $\overline{\mathbf{H}}_{\mathrm{der}} = \mathbf{H}_{\mathrm{der}}/Z(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$.

Le radical $R(\mathbf{H})$ coïncide avec le tore $Z(\mathbf{H})^\circ$ [**Bor**, ch. IV, 11.21]. Si $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{H}$, alors $\mathbf{T}' = (\mathbf{T} \cap \mathbf{H}_{\mathrm{der}})^\circ$ est un tore maximal de $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$, et le morphisme produit

$$R(\mathbf{H}) \times \mathbf{T}' \to \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$$

est surjectif, de noyau fini [**Bor**, ch. V, 21.1]. On en déduit que le morphisme produit

$$\rho : R(\mathbf{H}) \times \mathbf{H}_{\mathrm{der}} \to \mathbf{H}$$

est lui aussi surjectif, de noyau fini. D'après [**Bor**, ch. V, 22,4] ρ est une *isogénie centrale*, i.e. il vérifie les deux propriétés suivantes :
- $\ker(\rho)$ est fini et central dans $R(\mathbf{H}) \times \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$;
- $\ker(\mathrm{Lie}(\rho))$ est central dans $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{H}_{\mathrm{der}}$ $(= \mathrm{Lie}(R(\mathbf{H}) \times \mathbf{H}_{\mathrm{der}}))$.

Notons qu'en général, ρ *n'est pas* séparable.

Puisque $\mathbf{H} = Z(\mathbf{H})\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ et $\mathbf{H}_{\mathrm{der}} \cap Z(\mathbf{H}) = Z(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$, l'inclusion $\mathbf{H}_{\mathrm{der}} \subset \mathbf{H}$ induit par passage aux quotients une identification $\overline{\mathbf{H}}_{\mathrm{der}} = \overline{\mathbf{H}}$. Notons aussi que la représentation adjointe $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}$ induit par restriction une isogénie centrale

$$\mathbf{H}_{\mathrm{der}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{ad}}.$$

Si $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{H}$, le morphisme produit

$$\mathbf{T} \times \mathbf{H}_{\mathrm{der}} \to \mathbf{H}$$

est surjectif, et *séparable* [**Bor**, ch. V, 22.5]. On en déduit que l'inclusion l'inclusion $\mathbf{T} \subset \mathbf{H}$ induit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes algébriques

$$\mathbf{T}/(\mathbf{T} \cap \mathbf{H}_{\mathrm{der}}) \xrightarrow{\simeq} C(\mathbf{H}).$$

Par suite le cocentre $C(\mathbf{H})$ est un groupe connexe et diagonalisable, c'est–à–dire un tore. On a l'inclusion $\mathfrak{Z} + \mathfrak{H}_{\mathrm{der}} \subset \mathfrak{H}$ avec égalité si et seulement si ρ est séparable, auquel cas on a la décomposition $\mathfrak{H} = \mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{H}_{\mathrm{der}}$. En général (i.e. que ρ soit ou non séparable), si $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{H}$, d'après loc. cit. on a l'égalité

$$(*) \qquad \mathfrak{H} = \mathrm{Lie}(\mathbf{T}) + \mathfrak{H}_{\mathrm{der}}.$$

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Alors τ induit par restriction des $\overline{F}$–automorphismes τ_{cent} de $R(\mathbf{H})$ et τ_{der} de $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$. Puisque $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ est semisimple, le groupe $\mathrm{Out}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$ est fini, par conséquent on a l'égalité $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}}) = \mathrm{Aut}^0_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$. D'après la remarque 2 de 3.4, les trois conditions suivantes sont équivalentes :
- τ est localement fini ;
- $\tau \in \mathrm{Aut}^0_{\overline{F}}(\mathbf{H})$;
- τ_{cent} est d'ordre fini.

Posons $\mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{cent}} = \mathrm{Lie}(\tau_{\mathrm{cent}}) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{Z})$ et $\mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{der}} = \mathrm{Lie}(\tau_{\mathrm{der}}) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{H}_{\mathrm{der}})$. Alors pour $z \in Z(\mathbf{H})$ et $h' \in \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$, on a

$$(\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(zh) \circ \mathrm{Lie}(\tau))_{\mathrm{cent}} = \mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{cent}}$$

et

$$(\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(zh') \circ \mathrm{Lie}(\tau))_{\mathrm{der}} = \mathrm{Ad}_{\mathbf{H}_{\mathrm{der}}}(h') \circ \mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{der}}.$$

Notons que si ρ est séparable, alors on a la décomposition $\mathrm{Lie}(\tau) = \mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{cent}} + \mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{der}}$.

Puisque le morphisme quotient $\pi : \mathbf{H} \to C(\mathbf{H})$ est séparable, le morphisme $\mathrm{Lie}(\pi)$ induit une identification $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{\mathrm{der}} = \mathfrak{C}$. Notons τ_{cocent} le $\overline{F}$–automorphisme de $C(\mathbf{H})$ déduit de τ par passage au quotient, et posons $\mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{cocent}} = \mathrm{Lie}(\tau_{\mathrm{cocent}})$; c'est l'élément de $\mathrm{GL}(\mathfrak{C})$ déduit de $\mathrm{Lie}(\tau)$ par passage au quotient. Pour $h \in \mathbf{H}$, notons $c_h : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ l'application commutateur $x \mapsto hxh^{-1}x^{-1}$; c'est un morphisme de variétés algébriques, dont l'image est contenue dans $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$. Puisque sa différentielle au point 1 est donnée par $\mathrm{d}(c_h)_1 = \mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h) - \mathrm{id}_{\mathfrak{H}}$, on a l'inclusion $(\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h) - \mathrm{id}_{\mathfrak{H}})(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}_{\mathrm{der}}$, d'où l'égalité

$$(\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h) \circ \mathrm{Lie}(\tau))_{\mathrm{cocent}} = \mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{cocent}}.$$

Soit $\mathbb{P}$ le sous–groupe parabolique de $\mathrm{GL}(\mathfrak{H})$ formé des éléments Φ tels que $\Phi(\mathfrak{H}_{\mathrm{der}}) = \mathfrak{H}_{\mathrm{der}}$. Alors $\mathbb{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbb{P})$ est donné par

$$\mathbb{U} = \{\Phi \in \mathbb{P} : (\Phi - \mathrm{id}_{\mathfrak{H}})(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}_{\mathrm{der}} \text{ et } (\Phi - \mathrm{id}_{\mathfrak{H}})(\mathfrak{H}_{\mathrm{der}}) = 0\},$$

et $\mathbb{P}/\mathbb{U} = \mathrm{GL}(\mathfrak{H}_{\mathrm{der}}) \times \mathrm{GL}(\mathfrak{C})$. De plus, $\mathrm{Lie}(\tau)$ appartient à $\mathbb{P}$, et $(\mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{der}}, \mathrm{Lie}(\tau)_{\mathrm{cocent}})$ coïncide avec l'image de $\mathrm{Lie}(\tau)$ par le morphisme quotient $\mathbb{P} \to \mathbb{P}/\mathbb{U}$.

Lemme. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. On a $(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})^{\circ}_{\tau_{\mathrm{der}}} = (\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} \cap \mathbf{H}_{\mathrm{der}})^{\circ}$ et $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} = R(\mathbf{H})^{\circ}_{\tau}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})^{\circ}_{\tau}$.*

Démonstration. — La première égalité est claire, puisque $\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{der}}} = \mathbf{H}_{\tau} \cap \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$. Quant à la seconde égalité, posons $\mathbf{R}' = \mathbf{H}_{\mathrm{der}} \cap R(\mathbf{H}) \subset Z(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$, et soit $h \in \mathbf{H}_{\tau}$. Écrivons $h = zh'$ avec $z \in R(\mathbf{H})$ et $h' \in \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$. Puisque $\tau(h) = h$, on a $h'^{-1}\tau(h') = z\tau(z)^{-1} \in \mathbf{R}'$ et l'image de $z\tau(z)^{-1}$ dans le groupe quotient $\mathbf{R}'/\mathbf{R}'(1-\tau)$ ne dépend pas de la décomposition $h = zh'$ choisie ; on note $\bar{z}_h$ cette image. L'application

$$\mathbf{H}_{\tau} \mapsto \mathbf{R}'/\mathbf{R}'(1-\tau),\ h \mapsto \bar{z}_h$$

ainsi définie, est un morphisme de groupes algébriques de noyau $R(\mathbf{H})_{\tau}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau}$. Comme le groupe quotient $\mathbf{R}'/\mathbf{R}'(1-\tau)$ est fini, $R(\mathbf{H})_{\tau}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau}$ est un sous–groupe fermé d'indice fini de $\mathbf{H}_{\tau}$. D'où l'inclusion [**Bor**, ch. I, 1.2] $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} \subset R(\mathbf{H})_{\tau}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau}$, puis l'égalité $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} = [R(\mathbf{H})_{\tau}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau}]^{\circ}$. Comme $[R(\mathbf{H})_{\tau}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau}]^{\circ}$ coïncide avec l'image de $[R(\mathbf{H})_{\tau} \times (\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau}]^{\circ} = R(\mathbf{H})^{\circ}_{\tau} \times (\mathbf{H}_{\mathrm{der}})^{\circ}_{\tau}$ par le morphisme produit $R(\mathbf{H})_{\tau} \times (\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau} \to \mathbf{H}_{\tau}$, on a bien l'égalité $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} = R(\mathbf{H})^{\circ}_{\tau}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})^{\circ}_{\tau}$. □

Choisissons un sous–groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{H}$ et un tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{B}$. Notons $\Phi = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{H})$ l'ensemble des racines de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{H}$, $\Phi^+ = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ le sous–ensemble de Φ formé des racines de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{B}$, et $\Delta = \Delta(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ la base de Φ formée des racines simples de Φ^+. Pour $\alpha \in \Phi$, on note $\mathbf{U}_{\alpha}$ le sous–groupe unipotent de $\mathbf{H}$ associé à la racine α. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, choisissons un élément $u_{\alpha} \in \mathbf{U}_{\alpha} \smallsetminus \{1\}$. Alors $\mathrm{Out}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ est isomorphe au sous–groupe $\mathfrak{A} = \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{T}, \{u_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta})$ de $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ formé des $\overline{F}$–automorphismes qui stabilisent $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ et la famille $\{u_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$ [**Sp**, prop. 2.13] ; i.e. on a la décomposition en produit semidirect

$$\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) = \mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) \rtimes \mathfrak{A}. \qquad (**)$$

Pour $\alpha \in \Delta$, notons $e_\alpha : \mathbb{G}_\mathrm{a} \rightarrow \mathbf{U}_\alpha$ l'*épinglage de* $\mathbf{U}_\alpha$ *défini par* u_α, i.e. l'unique isomorphisme de groupes algébriques tel que

$$\begin{cases} te_\alpha(x)t^{-1} = e_\alpha(\alpha(t)x) & (x \in \overline{F},\, t \in \mathbf{T}) \\ e_\alpha(1) = u_\alpha \end{cases}.$$

Si $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ stabilise la paire $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$, alors τ opère par permutation sur l'ensemble Δ, et pour chaque $\alpha \in \Delta$, il existe un (unique) $y_{\tau,\alpha} \in \overline{F}^\times$ tel que

$$\tau \circ e_\alpha(x) = e_{\tau(\alpha)}(y_{\tau,\alpha}x) \quad (x \in \overline{F});$$

par suite $\tau \in \mathfrak{A}$ si et seulement si $y_{\tau,\alpha} = 1$ $(\alpha \in \Delta)$. On a donc $\mathfrak{A} = \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{T}, \{e_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$. Choisissons une autre famille $\{u_{1,\alpha} \in \mathbf{U}_\alpha \smallsetminus \{1\} : \alpha \in \Delta\}$, et notons $\mathfrak{A}_1$ et $e_{1,\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$ les objets définis comme ci-dessus en remplaçant $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ par $\{u_{1,\alpha}\}_{\alpha\in\Delta}$. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, il existe un unique élément $y_\alpha \in \overline{F}^\times$ tel que $e_{1,\alpha}(t) = e_\alpha(y_\alpha t)$. Choisissons un $t_1 \in \mathbf{T}$ tel que pour chaque $\alpha \in \Delta$, on ait $\alpha(t_1) = y_\alpha$. Alors on a $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t_1) \circ e_\alpha = e_{1,\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$. D'où un isomorphisme de groupes

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_1,\ \tau \mapsto \tau_1 = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t_1) \circ \tau \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t_1)^{-1},$$

qui permet de passer de la décomposition $(**)$ à la décomposition

$$\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) = \mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) \rtimes \mathfrak{A}_1.$$

Précisément, pour $h \in \mathbf{H}$ et $\tau \in \mathfrak{A}$, on a

$$\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h\tau(t_1)t_1^{-1}) \circ \tau_1.$$

3.6. Revêtement universel. — Soit

$$\pi : \mathbf{H}_{\mathrm{SC}} \rightarrow \mathbf{H}' = \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$$

le revêtement universel de $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ [**T**, 2.6.1] : le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ est semisimple et simplement connexe, et π est une isogénie centrale. Posons $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cap \mathbf{H}'$ et $\mathbf{T}' = \mathbf{T} \cap \mathbf{H}'$; ce sont respectivement un sous–groupe de Borel et un tore maximal de $\mathbf{H}'$. D'après [**Bor**, ch. V, 22.6], les images réciproques $\mathbf{B}_{\mathrm{sc}}$ de $\mathbf{B}'$, et $\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}$ de $\mathbf{T}'$, par π sont respectivement un sous–groupe de Borel et un tore maximal de $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$. De plus (loc. cit.), l'application

$$\mathrm{X}^*(\mathbf{T}') \rightarrow \mathrm{X}^*(\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}),\ \chi \mapsto \pi^\sharp(\chi) = \chi \circ (\pi|_{\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}})$$

induit une application bijective

$$\Phi' = \Phi(\mathbf{T}', \mathbf{H}') \rightarrow \Phi(\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}, \mathbf{H}_{\mathrm{SC}}) = \widetilde{\Phi},$$

et pour $\alpha \in \Phi'$, π induit par restriction un isomorphisme de groupes algébriques

$$\mathbf{U}_{\pi^\sharp(\alpha)} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{U}_\alpha.$$

D'autre part, l'application $\mathrm{X}^*(\mathbf{T}) \rightarrow \mathrm{X}^*(\mathbf{T}')$, $\chi \mapsto \chi' = \chi|_{\mathbf{T}'}$ induit une application bijective $\Phi \rightarrow \Phi'$, et pour $\alpha \in \Phi$, on a $\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{U}_{\alpha'} \subset \mathbf{H}'$. On peut donc identifier Φ et Φ'. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, posons $\tilde{u}_\alpha = \pi^{-1}(u_\alpha) \in \mathbf{U}_{\pi^\sharp(\alpha)}$. Comme l'ensemble $\{\pi^\sharp(\alpha) : \alpha \in \Delta\}$ coïncide avec la base $\Delta(\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}, \mathbf{B}_{\mathrm{sc}})$ de $\widetilde{\Phi}$ associée à $\mathbf{B}_{\mathrm{sc}}$, on peut poser $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}, \mathbf{B}_{\mathrm{sc}}, \mathbf{T}_{\mathrm{sc}}, \{\tilde{u}_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$. On pose aussi $\mathfrak{A}' = \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}', \mathbf{B}', \mathbf{T}', \{u_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$.

Le lemme suivant est dû à Steinberg [**St**, 9.16].

Lemme. — *Soit* $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$. *Il existe un unique* $\tilde{\tau} \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}})$ *relevant* τ, *i.e. vérifiant* $\pi \circ \tau = \tilde{\tau} \circ \pi$.

L'unicité du relèvement entraîne que l'application

$$(*)\qquad \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}}) \rightarrow \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}),\ \tau \mapsto \tilde{\tau}$$

est un morphisme de groupes. Si $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$ stabilise la paire $(\mathbf{B}', \mathbf{T}')$, alors par construction, son relèvement $\tilde{\tau}$ à $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ stabilise la paire $(\mathbf{B}_{\mathrm{sc}}, \mathbf{T}_{\mathrm{sc}})$; par conséquent l'application $(*)$ induit un isomorphisme de groupes $\mathfrak{A}' \rightarrow \widetilde{\mathfrak{A}}$. D'autre part π induit par passage aux quotients un morphisme bijectif de groupes algébriques $\overline{\pi} : \mathbf{H}_{\mathrm{SC}}/Z(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}) \rightarrow \mathbf{H}_{\mathrm{der}}/Z(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$, qui n'est en général pas un isomorphisme. On en déduit que l'application $(*)$ induit aussi un isomorphisme de groupes $\mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H}) \rightarrow \mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}})$. L'application $(*)$ est donc un isomorphisme de groupes, qui préserve la décomposition $(**)$ de 3.5 pour $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ et pour $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$.

Exemple. — Soit $\mathbf{H}$ $(= \mathbf{H}_{\mathrm{der}})$ le groupe $\mathbb{PGL}_2 = \mathbb{GL}_2/\mathbf{Z}$, où $\mathbf{Z} = Z(\mathbb{GL}_2) \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Alors le revêtement universel $\pi : \mathbf{H}_{\mathrm{SC}} = \mathbb{SL}_2 \rightarrow \mathbf{H}$ est le composé de l'inclusion $\mathbb{SL}_2 \subset \mathbb{GL}_2$ et du morphisme quotient $\mathbb{GL}_2 \rightarrow \mathbb{PGL}_2$. Si F est de caractéristique 2, le morphisme π est bijectif (on a $\pi = \overline{\pi}$) mais il n'est pas séparable — cf. [**Bor**, ch. III, 10.8, rem. p. 144]. ■

3.7. Automorphismes quasi–semisimples. — Commençons par le résultat bien connu suivant, dû à Steinberg [**St**, 7.2] :

Théorème 1. — *Tout $\overline{F}$–automorphisme de $\mathbf{H}$ stabilise un sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}$.*

On appelle *paire de Borel de* $\mathbf{H}$ une paire $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ formée d'un sous–groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{H}$ et d'un tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{B}$. Le groupe $\mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ opère naturellement sur l'ensemble des paires de Borel de $\mathbf{H}$: si $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ et $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ est une paire de Borel de $\mathbf{H}$, on pose $\tau(\mathbf{B}, \mathbf{T}) = (\tau(\mathbf{B}), \tau(\mathbf{T}))$. Rappelons que toutes les paires de Borel de $\mathbf{H}$ sont dans la même orbite sous $\mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$.

Un $\overline{F}$–automorphisme de $\mathbf{H}$ est dit *quasi–semisimple* s'il stabilise une paire de Borel de $\mathbf{H}$. Si $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$, alors τ est quasi–semisimple si et seulement si τ_{der} est quasi–semisimple.

Si $h \in \mathbf{H}$, alors $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$ est quasi–semisimple si et seulement si h est semisimple.

Si $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ est quasi–semisimple, un tore maximal τ–stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$ est dit τ–*admissible* s'il est contenu dans un sous–groupe de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$. Si τ stabilise une paire de Borel $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$, alors τ stabilise aussi la paire de Borel $(\mathbf{B}^-, \mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$ *opposée à* $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$, où $\mathbf{B}^-$ est l'unique sous–groupe de Borel contenant $\mathbf{T}$ tel que $\mathbf{B}^- \cap \mathbf{B} = \mathbf{T}$.

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Alors il existe un $h \in \mathbf{H}$ tel que le $\overline{F}$–automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ de $\mathbf{H}$ est quasi–semisimple. Plus précisément, on a le

Lemme. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$, et soit $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ une paire de Borel de $\mathbf{H}$ telle que $\tau(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$. Alors il existe un unique $u \in R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u) \circ \tau(\mathbf{B}, \mathbf{T}) = (\mathbf{B}, \mathbf{T})$.*

Démonstration. — Puisque $\tau(\mathbf{T})$ est un tore maximal de $\mathbf{B}$, il existe un unique $u \in R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$ tel que $\tau(\mathbf{T}) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u^{-1})(\mathbf{T})$. D'où le lemme. □

D'après le théorème 1.8 et les propositions 1.11 et 1.12 de [**DM1**], on a le

Théorème 2. — *Soit τ un $\overline{F}$–automorphisme quasi–semisimple de $\mathbf{H}$.*

(1) *Le groupe $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est réductif, et le groupe $\mathbf{H}_\tau/\mathbf{H}_\tau^\circ$ est formé d'éléments semisimples.*

(2) *Soit $\mathbf{P}$ un sous–groupe parabolique τ–stable de $\mathbf{H}$. Il existe une composante de Levi de $\mathbf{P}$ qui soit τ–stable.*

(3) *Soit* $\mathbf{P}$ *un sous–groupe parabolique* τ*–stable de* $\mathbf{H}$*, et* $\mathbf{L}$ *une composante de Levi* τ*–stable de* $\mathbf{P}$*. Posons* $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P})$*. Alors* $\mathbf{U}_\tau$ *est connexe,* $\mathbf{P}^\sharp = \mathbf{P} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ$ *est un sous–groupe parabolique de* $\mathbf{H}_\tau^\circ$ *de radical unipotent* $\mathbf{U}_\tau$*, et* $\mathbf{L}^\sharp = \mathbf{L} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ$ *est une composante de Levi de* $\mathbf{P}^\sharp$*.*

(4) *Soit* $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ *une paire de Borel* τ*–stable de* $\mathbf{H}$*. Alors* $(\mathbf{B}^\sharp, \mathbf{T}^\sharp) = (\mathbf{B} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ, \mathbf{T} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ)$ *est une paire de Borel de* $\mathbf{H}_\tau^\circ$*. Réciproquement, si* $(\mathbf{B}^\sharp, \mathbf{T}^\sharp)$ *est une paire de Borel de* $\mathbf{H}_\tau^\circ$*, alors* $\mathbf{T} = \mathbf{Z}_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\sharp)$ *est un tore maximal* τ*–stable de* $\mathbf{H}$*, et il existe un sous–groupe de Borel* τ*–stable* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{H}$ *tel que* $\mathbf{B}^\sharp \subset \mathbf{B}$ *et* $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$*.*

(5) *Soit* $\mathbf{H}'$ *un sous–groupe fermé réductif connexe de rang maximal de* $\mathbf{H}$*. Si* $\mathbf{H}'$ *est* τ*–stable et si* $\mathbf{H}_\tau'^\circ$ *est un sous–groupe de rang maximal de* $\mathbf{H}_\tau^\circ$*, alors la restriction de* τ *à* $\mathbf{H}'$ *est encore quasi–semisimple.*

Remarque 1. — D'après le point (1), tout élément unipotent de $\mathbf{H}_\tau$ appartient à $\mathbf{H}_\tau^\circ$. En particulier si $p > 1$, alors l'ordre du groupe fini $\mathbf{H}_\tau / \mathbf{H}_\tau^\circ$ est premier à p.

D'après le point (4), l'application $\mathbf{T}^\sharp \mapsto \mathbf{Z}_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\sharp)$ est une bijection entre l'ensemble des tores maximaux de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ et l'ensemble des tores maximaux τ–admissibles de $\mathbf{H}$. En particulier, si $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est central dans $\mathbf{H}$, alors $\mathbf{H}$ est un tore.

D'après le point (3), le point (5) s'applique en particulier à toute composante de Levi τ–stable $\mathbf{H}' = \mathbf{L}$ d'un sous–groupe parabolique τ–stable $\mathbf{P}$ de $\mathbf{H}$. Notons aussi que puisque $\mathbf{L} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ$ est connexe, on a $\mathbf{L}_\tau^\circ = \mathbf{L} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ$ et $\mathbf{P}_\tau^\circ = \mathbf{P} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ$. ■

Remarque 2. — Supposons le groupe $\mathbf{H}$ semisimple, et soit τ un $\overline{F}$–automorphisme quasi–semisimple de $\mathbf{H}$. D'après [**St**, cor. 9.4] le groupe $\mathbf{H}_\tau / \mathbf{H}_\tau^\circ$ est abélien. Si de plus $\mathbf{H}$ est simplement connexe, alors d'après [**St**, theo. 8.2], le groupe $\mathbf{H}_\tau$ est connexe. ■

Proposition. — *Soit* $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ *quasi–semisimple,* $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ *une paire de Borel* τ*–stable de* $\mathbf{H}$*, et* $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$*. Le morphisme* $\mathbf{U} \to \mathbf{U}$*,* $u \mapsto u\tau(u)^{-1}$ *est séparable.*

Démonstration. — L'application $\mathbf{U} \times \mathbf{U} \to \mathbf{U}$, $(u, v) \mapsto u \cdot v = uv\tau(u)^{-1}$ est une action algébrique de $\mathbf{U}$ sur lui-même. Posant $\pi_v(u) = u \cdot v$ $(u,\, v \in \mathbf{U})$, il s'agit de montrer que pour $v = 1$, le morphisme $\pi_1 = (1 - \tau)|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ est séparable. En d'autres termes (cf. 3.1), il s'agit d'établir l'égalité $\mathrm{Lie}(\mathbf{U}_\tau) = \ker(\mathrm{id} - \mathrm{Lie}(\tau); \mathrm{Lie}(\mathbf{U}))$.

Soit $\pi : \mathbf{H}_{\mathrm{SC}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ le revêtement universel de $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$, et soit $\tilde{\tau} \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}})$ le relèvement de τ à $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ (cf. 3.6). Notons $\mathbf{B}_{\mathrm{sc}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}$ et $\mathbf{U}_{\mathrm{sc}}$ les images réciproques de $\mathbf{B} \cap \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$, $\mathbf{T} \cap \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ et $\mathbf{U}$ par π. Alors on a (cf. 3.6) :

– $\tilde{\tau}$ stabilise la paire de Borel $(\mathbf{B}_{\mathrm{sc}}, \mathbf{T}_{\mathrm{sc}})$ de $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$;
– π induit un isomorphisme de groupes algébriques $\mathbf{U}_{\mathrm{sc}} \to \mathbf{U}$;
– pour $\tilde{u} \in \mathbf{U}_{\mathrm{sc}}$ et $u = \pi(\tilde{u}) \in \mathbf{U}$, on a $\pi(\tilde{u}\tilde{\tau}(\tilde{u})^{-1}) = u\tau(u)^{-1}$.

On peut donc supposer $\mathbf{H}$ semisimple et simplement connexe. Puisque τ est quasi–semisimple, le groupe $\mathbf{H}_\tau$ est connexe (remarque 2). En particulier, $\mathbf{S} = \mathbf{T}_\tau$ $(= \mathbf{T} \cap \mathbf{H}_\tau)$ est un tore maximal de $\mathbf{H}_\tau$. D'après [**T**, 3.1.2], $\mathbf{H}$ se décompose en un produit direct $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \cdots \times \mathbf{H}_n$ où chaque $\mathbf{H}_i$ est un groupe semisimple simplement connexe et presque simple, et cette décomposition est unique à permutation des $\mathbf{H}_i$ près. L'unicité de la décomposition implique que τ permute les facteurs $\mathbf{H}_i$. On peut donc supposer que τ permute transitivement les facteurs $\mathbf{H}_i$, et quitte à réordonner ces facteurs, que $\tau(\mathbf{H}_{i+1}) = \mathbf{H}_i$ pour $i = 1, \ldots n-1$. Alors en identifiant $\mathbf{H}_{i+1}$ à $\mathbf{H}_1$ via τ^i pour $i = 1, \ldots, n-1$, l'automorphisme τ de $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \cdots \times \mathbf{H}_1$ est donné par

$$\tau(x) = (x_2, \ldots, x_n, \tau_1(x_1)), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{H},$$

où $\tau_1 \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_1)$ est donné par la restriction de τ^n à $\mathbf{H}_1$. On peut donc supposer $\mathbf{H}$ presque simple (et toujours semisimple simplement connexe), c'est–à–dire $n = 1$ et $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$.

Posons $\Phi = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{H})$ et $\Phi^+ = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ comme en 3.5. Pour chaque racine $\alpha \in \Phi$, notons $\Phi(\alpha)$ le sous–ensemble de Φ formé des racines β dont la restriction à $\mathbf{S}$ est proportionnelle à $\alpha|_{\mathbf{S}}$; i.e. telles que $\beta|_{\mathbf{S}} = c\alpha|_{\mathbf{S}}$ pour un élément $c \in \mathbb{R}_{>0}$ (on a donc $\Phi(\alpha) \subset \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}^*(\mathbf{S})$). On distingue deux cas (cf. la démonstration de [**St**, theo. 8.2]) :

I : $\Phi(\alpha)$ est une τ–orbite, i.e. il existe un entier $l \geq 1$ tel que $\Phi(\alpha) = \{\alpha, \tau(\alpha), \ldots, \tau^{l-1}(\alpha)\}$, $\tau^l(\alpha) = \alpha$, $\tau^i(\alpha) \neq \alpha$ et $\alpha + \tau^i(\alpha) \notin \Phi$ pour $i = 1, \ldots, l-1$;

II : $\Phi(\alpha) = \{\alpha, \tau(\alpha), \alpha + \tau(\alpha)\}$, $\tau(\alpha) \neq \alpha$, $\tau^2(\alpha) = \alpha$ et $\alpha + \tau(\alpha) \in \Phi$ (ce qui n'est possible que si Φ est de type A_{2n}).

Notons $\mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}$ le sous–groupe de $\mathbf{H}$ engendré par les $\mathbf{U}_\beta$ pour $\beta \in \Phi(\alpha)$. Le groupe $\mathbf{U}$ est le produit direct, pris dans n'importe quel ordre, des groupes $\mathbf{U}_\alpha$ pour $\alpha \in \Phi^+$ [**Bor**, ch. IV, 14.4]. On peut donc choisir un sous–ensemble Ψ de Φ^+ tel que $\mathbf{U}$ soit le produit direct, pris dans n'importe quel ordre, des groupes $\mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}$ pour $\alpha \in \Psi$. D'après le théorème 2, le groupe $\mathbf{U}_\tau = \mathbf{U} \cap \mathbf{H}_\tau$ est connexe et c'est le radical unipotent du sous–groupe de Borel $\mathbf{B}_\tau = \mathbf{B} \cap \mathbf{H}_\tau$ de $\mathbf{H}_\tau$. Pour chaque racine $\alpha \in \Psi$, le groupe $\mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}$ est τ–stable, et $\mathbf{U}_\tau$ est le produit direct (pris dans n'importe quel ordre) des $\mathbf{U}_{\Phi(\alpha),\tau} = \mathbf{U}_{\Phi(\alpha)} \cap \mathbf{U}_\tau$ pour $\alpha \in \Psi$. Le morphisme $1 - \tau : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ induit, pour chaque $\alpha \in \Psi$, un morphisme $1 - \tau : \mathbf{U}_{\Phi(\alpha)} \to \mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}$, et il suffit de montrer que chacun des morphismes $(1-\tau)|_{\mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}}$ est séparable. Fixons donc une racine $\alpha \in \Psi$ et posons $\rho = (1-\tau)|_{\mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}}$. Fixons aussi un épinglage $e_\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbf{U}_\alpha$ de $\mathbf{U}_\alpha$ (cf. 3.5).

Commençons par le cas *I*. Pour $i = 1, \ldots, l-1$, posons $e_{\tau^i(\alpha)} = \tau^i \circ e_\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbf{U}_{\tau^i(\alpha)}$; c'est un épinglage de $\mathbf{U}_{\tau^i(\alpha)}$. Puisque $\tau^l(\alpha) = \alpha$, il existe un $y \in \overline{F}^\times$ tel que $\tau^l \circ e_\alpha(x) = e_\alpha(yx)$ pour tout $x \in \overline{F}$. Les groupes $\mathbf{U}_\beta$ ($\beta \in \Phi(\alpha)$) commutent deux–à–deux, par suite ρ est un morphisme de groupes, et pour $u = \prod_{i=0}^{l-1} e_{\tau^i(\alpha)}(x_i) \in \mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}$, posant $x_{-1} = yx_{l-1}$, on a

$$\rho(u) = \prod_{i=0}^{l-1} e_{\tau^i(\alpha)}(x_i - x_{i-1}).$$

Le noyau $\ker \rho = \mathbf{U}_{\Phi(\alpha),\tau}$ est non trivial si et seulement si $y = 1$, auquel cas c'est l'ensemble des $\prod_{i=0}^{l-1} e_{\tau^i(\alpha)}(x)$ pour $x \in \overline{F}$. Un calcul analogue pour $\mathrm{Lie}(\rho)$ montre que

$$\mathrm{Lie}(\ker(\rho)) = \ker(\mathrm{Lie}(\rho)).$$

Ainsi ρ est séparable, et c'est un automorphisme si (et seulement si) $y \neq 1$.

Traitons maintenant le cas *II*. Posons $e_{\tau(\alpha)} = \tau \circ e_\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbf{U}_{\tau(\alpha)}$, $\beta = \alpha + \tau(\alpha)$, et soit $e_\beta : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbf{U}_\beta$ un épinglage de $\mathbf{U}_\beta$. Un calcul simple dans $SL(3, \overline{F})$ montre qu'il existe un $u \in \overline{F}^\times$ tel que $(e_\alpha(x), e_{\tau(\alpha)}(x')) = e_\beta(2uxx')$ pour tous $x, y \in \overline{F}$, où $(\cdot,\cdot)$ désigne l'application commutateur. En particulier si $p = 2$, les éléments $e_\alpha(x)$ et $e_{\tau\alpha}(x_{\tau(\alpha)})$ commutent. Si $p \neq 2$, on choisit e_β de telle manière que $u = \frac{1}{2}$. Puisque $\tau^2(\alpha) = \alpha$, il existe des $y, z \in \overline{F}^\times$ tels que $\tau \circ e_{\tau(\alpha)}(x) = e_\alpha(yx)$ et $\tau \circ e_\beta(x) = e_\beta(zx)$ pour tout $x \in \overline{F}$. Si $p \neq 2$, la relation

$$\tau(e_\alpha(x), e_{\tau(\alpha)}(x')) = (e_{\tau(\alpha)}(x), e_\alpha(yx')) = e_\beta(-yxx'),$$

entraîne que $z = -y$. Pour $u = e_\alpha(x_\alpha)e_\beta(x_\beta)e_{\tau(\alpha)}(x_{\tau(\alpha)}) \in \mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}$, on a

$$\begin{aligned}\rho(u) &= e_\alpha(x_\alpha)e_\beta(x_\beta)e_{\tau(\alpha)}(x_{\tau(\alpha)})e_\alpha(-yx_{\tau(\alpha)})e_\beta(-zx_\beta)e_{\tau(\alpha)}(-x_\alpha)\\ &= e_\alpha(x_\alpha - yx_{\tau(\alpha)})e_\beta((1-z)x_\beta + 2uyx_{\tau(\alpha)}^2)e_{\tau(\alpha)}(x_{\tau(\alpha)} - x_\alpha).\end{aligned}$$

On distingue plusieurs cas :

- si $y \notin \{\pm 1\}$ ou $z \notin \{\pm 1\}$, alors $\mathbf{U}_{\Phi(\alpha),\tau} = \{1\}$;
- si et $p \neq 2$ et $y = -1$, alors $\mathbf{U}_{\Phi(\alpha),\tau} = \{e_\beta(x) : x \in \overline{F}\}$;
- si $p \neq 2$ et $y = 1$, alors $\mathbf{U}_{\Phi(\alpha),\tau} = \{e_\alpha(x)e_\beta(-\frac{1}{2}x^2)e_{\tau(\alpha)}(x) : x \in \overline{F}\}$;

– si $p = 2$ et $y = z = 1$, alors $\mathbf{U}_{\Phi(\alpha),\tau} = \{e_\alpha(x)e_\beta(x')e_{\tau(\alpha)}(x) : x,\, x' \in \overline{F}\}$.

Posons $E_\gamma = \mathrm{Lie}(e_\gamma)(1)$ ($\gamma \in \Phi(\alpha)$). Pour $X = x_\alpha E_\alpha + x_\beta E_\beta + x_{\tau(\alpha)}E_{\tau(\alpha)} \in \mathrm{Lie}(\mathbf{U}_{\Phi(\alpha)})$, on a

$$X - \mathrm{Lie}(\tau)(X) = (x_\alpha - yx_{\tau(\alpha)})E_\alpha + (1-z)x_\beta E_\beta + (x_{\tau(\alpha)} - x_\alpha)E_{\tau(\alpha)}.$$

Soit $\mathfrak{K} = \ker(\mathrm{id} - \mathrm{Lie}(\tau); \mathrm{Lie}(\mathbf{U}_{\Phi(\alpha)}))$. On a :

– si $y \notin \{\pm 1\}$ ou $z \notin \{\pm 1\}$, alors $\mathfrak{K} = \{0\}$;
– si $p \neq 2$ et $y = -1$, alors $\mathfrak{K} = \{xE_\beta : x \in \overline{F}\}$;
– si $p \neq 2$ et $y = 1$, alors $\mathfrak{K} = \{x(E_\alpha + E_{\tau(\alpha)}) : x \in \overline{F}\}$.
– si $p = 2$ et $y = z = 1$, alors $\mathfrak{K} = \{x(E_\alpha + E_{\tau(\alpha)}) + x'E_\beta : x,\, x' \in \overline{F}\}$.

On a donc

$$\mathrm{Lie}(\ker \rho) = \mathfrak{K},$$

i.e. ρ est séparable. Cela achève la démonstration de la proposition. □

Corollaire. — *Supposons* $\mathbf{H}$ *semisimple et simplement connexe, et soit* $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ *quasi–semisimple. Le morphisme* $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $h \mapsto h\tau(h)^{-1}$ *est séparable.*

Démonstration. — Soit $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ une paire de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$. Posons $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$ et reprenons les notations de la démonstration de la proposition. Pour $\alpha \in \Delta = \Delta(\mathbf{T}, \mathbf{B})$, notons $\alpha^\vee \in \mathrm{X}_*(\mathbf{T})$ la coracine associée à α, où $\mathrm{X}_*(\mathbf{T})$ désigne le groupe des cocaractères de $\mathbf{T}$. Puisque $\mathbf{H}$ est simplement connexe, on a $\mathbf{X}_*(\mathbf{T}) = \oplus_{\alpha\in\Delta}\mathbb{Z}\alpha^\vee$. Soit $t \in \mathbf{T}$. Écrivons $t = \prod_{\alpha\in\Delta_\circ} \alpha^\vee(x_\alpha)$, $x_\alpha \in \overline{F}^\times$. Puisque $\tau(\alpha^\vee(x)) = \tau(\alpha)^\vee(x)$ ($\alpha \in \Delta$, $x \in \overline{F}^\times$), on a

$$t\tau(t)^{-1} = \prod_{\alpha\in\Delta} \alpha^\vee(x_\alpha x^{-1}_{\tau^{-1}(\alpha)}).$$

Le groupe $\mathbf{S} = \mathbf{T}_\tau$ est l'ensemble des $t = \prod_{\alpha\in\Delta}\alpha^\vee(x_\alpha)$ tels que $x_{\tau(\alpha)} = x_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$. De la même manière, on obtient que $\mathfrak{T}_\tau = \ker(\mathrm{id}_{\mathfrak{T}} - \mathrm{Lie}(\tau|_{\mathbf{T}}))$ est l'ensemble des $X = \sum_{\alpha\in\Delta}\alpha^\vee(X_\alpha)$ tels que $X_{\tau(\alpha)} = X_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$; où l'on a posé $\alpha^\vee(Y) = \mathrm{Lie}(\alpha^\vee)(Y)$ pour $Y \in \overline{F}$. On en déduit que $\mathrm{Lie}(\mathbf{S}) = \mathfrak{T}_\tau$. Le morphisme de groupes $(1-\tau)|_{\mathbf{T}}$ est donc séparable, et d'après le lemme, le morphisme $(1-\tau)|_{\mathbf{B}}$ est lui aussi séparable. Soit $\mathbf{U}^-$ le radical unipotent du sous–groupe de Borel $\mathbf{B}^-$ de $\mathbf{H}$ opposé à $\mathbf{B}$ par rapport à $\mathbf{T}$. Puisque la paire de Borel $(\mathbf{B}^-, \mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$ est τ–admissible, à nouveau d'après le lemme, le morphisme $(1-\tau)|_{\mathbf{U}^-}$ est séparable. D'après [**Bor**, ch. IV, 14.14], l'application produit $\mathbf{U}^- \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}$ est un isomorphisme de $\mathbf{U}^- \times \mathbf{B}$ sur un ouvert de $\mathbf{H}$, et puisque les restrictions de $1-\tau$ à $\mathbf{U}^-$ et $\mathbf{B}$ sont séparables, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{U}^-_\tau) + \mathrm{Lie}(\mathbf{B}_\tau) = \mathrm{Lie}(\mathbf{U}^-)_\tau + \mathrm{Lie}(\mathbf{B})_\tau = \mathfrak{H}_\tau.$$

Donc $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_\tau) = \mathfrak{H}_\tau$ et le morphisme $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $h \mapsto \tau(h)h^{-1}$ est séparable. □

Remarque 3. — Bien sûr, le corollaire n'est en général plus vrai si $\mathbf{H}$ n'est pas semisimple simplement connexe : si $p = 2$ et τ est le passage à l'inverse dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, le morphisme $1-\tau : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \rightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, $x \mapsto x^2$ est bijectif mais n'est pas séparable. ■

Remarque 4. — Soit τ un automorphisme quasi–semisimple de $\mathbf{H}$, et $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ une paire de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$. Pour $\alpha \in \Phi = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{H})$, on note $l = l_{\tau,\alpha}$ le plus petit entier ≥ 1 tel que $\tau^l(\alpha) = \alpha$, et $y = y_{\tau,\alpha}$ l'élément de $\overline{F}^\times$ défini par $\tau^l \circ e_\alpha(x) = e_\alpha(yx)$ ($x \in \overline{F}$), où $e_\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \rightarrow \mathbf{U}_\alpha$ est un épinglage de $\mathbf{U}_\alpha$ dont le choix n'a pas d'importance. D'ailleurs l'entier l et l'élément y ne dépendent pas vraiment de α mais seulement de la τ–orbite $\mathcal{O} = \{\alpha, \tau(\alpha), \ldots, \tau^{l-1}(\alpha)\} \subset \Phi$. On les note donc aussi $l_{\tau,\mathcal{O}}$ et $y_{\tau,\mathcal{O}}$. Soit Φ_τ l'ensemble des

τ–orbites $\mathcal{O}$ dans Φ telles que $y_{\tau,\mathcal{O}} = 1$, et $\Phi(\mathbf{T}_\tau^\circ, \mathbf{H}_\tau^\circ)$ l'ensemble des racines de $\mathbf{T}_\tau^\circ$ dans $\mathbf{H}_\tau^\circ$. Pour une τ–orbite $\mathcal{O}$ dans Φ, on pose

$$\mathcal{O}' = |\mathcal{O}|^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} \alpha \in \mathrm{X}^*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

D'après [**DM1**, théo. 1.8], l'application $\Phi/\langle\tau\rangle \to \mathrm{X}^*(\mathbf{T}_\tau^\circ)$, $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}'|_{\mathrm{X}^*(\mathbf{T}_\tau^\circ)}$ induit par restriction une application surjective

$$\Phi_\tau \to \Phi(\mathbf{T}_\tau^\circ, \mathbf{H}_\tau^\circ).$$

Cette surjection est bijective, sauf si $p = 2$ et s'il existe une orbite $\mathcal{O} \in \Phi_\tau$ contenant deux racines α et α' telles que $\alpha + \alpha' \in \Phi$, auquel cas pour avoir une bijection il faut exclure ces orbites $\mathcal{O}$ de l'ensemble Φ_τ. Notons que, pour tout p, l'existence d'une telle orbite $\mathcal{O} \in \Phi_\tau$ n'est possible que si le diagramme de Dynkin de G possède k composantes de type A_{2n}, permutées transitivement par τ et telles que τ^k opère sur chacune d'elles par "retournement", c'est–à–dire de la forme

$$A_{2n} : \overset{\alpha_n}{\circ} \!\!\frac{\quad}{}\; \cdots \;\frac{\quad}{}\!\! \overset{\alpha_2}{\circ} \!\!\frac{\quad}{}\!\! \overset{\alpha_1}{\circ} \!\!\frac{\quad}{}\!\! \overset{\tau^k(\alpha_1)}{\circ} \!\!\frac{\quad}{}\!\! \overset{\tau^k(\alpha_2)}{\circ} \!\!\frac{\quad}{}\; \cdots \;\frac{\quad}{}\!\! \overset{\tau^k(\alpha_n)}{\circ} .$$

Alors pour toute racine α (dans l'une de ces k composantes) telle que $\alpha + \tau^k(\alpha)$ soit une racine, les τ–orbites de α et de $\alpha + \tau^k(\alpha)$ ont même image dans $\mathrm{X}^*(\mathbf{T}_\tau^\circ)$, et

$$y_{\tau,\alpha} = -y_{\tau,\alpha+\tau^k(\alpha)} \; (= y_{\tau,\alpha+\tau^k(\alpha)} \text{ si } p = 2).$$

Pour une description explicite du système de racines $\Phi(\mathbf{T}_\tau^\circ, \mathbf{H}_\tau^\circ)$, on renvoie à [**DM2**]. ■

3.8. Automorphismes quasi–centraux. — Un automorphisme quasi–semisimple τ de $\mathbf{H}$ est dit *quasi–central* si pour tout automorphisme quasi–semisimple de $\mathbf{H}$ de la forme $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ avec $h \in \mathbf{H}$, on a $\dim(\mathbf{H}^\circ_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau}) \leq \dim(\mathbf{H}_\tau^\circ)$.

Lemme. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ quasi–semisimple, et soit $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ une paire de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$. Alors il existe un $t \in \mathbf{T}$ tel que le $\overline{F}$–automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau$ de $\mathbf{H}$ est quasi–central.*

Démonstration. — Soit $h \in \mathbf{H}$ tel que le $\overline{F}$–automorphisme $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ de $\mathbf{H}$ est quasi–central. Puisque τ' est quasi–semisimple, il existe un $x \in \mathbf{H}$ tel que τ' stabilise la paire de Borel $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x) \circ (\mathbf{B}, \mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$. D'après la relation $(*)$ de 3.2, quitte à remplacer h par $x^{-1}h\tau(x)$, on peut supposer que $\tau'(\mathbf{B}, \mathbf{T}) = (\mathbf{B}, \mathbf{T})$. Alors on a $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)(\mathbf{B}, \mathbf{T}) = (\mathbf{B}, \mathbf{T})$, donc $h \in \mathbf{T}$. □

D'après [**DM1**, prop. 1.21, cor. 1.25], on a la

Proposition. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ quasi–central.*

(1) *Si $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ et $(\mathbf{B}', \mathbf{T}')$ sont deux paires de Borel τ–stables de $\mathbf{H}$, alors il existe un $h \in \mathbf{H}_\tau^\circ$ tel que $(\mathbf{B}', \mathbf{T}') = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)(\mathbf{B}, \mathbf{T})$.*

(2) *Soit $\mathbf{P}$ un sous–groupe parabolique τ–stable de $\mathbf{H}$, et $\mathbf{L}$ une composante de Levi τ–stable de $\mathbf{P}$. Si $h \in \mathbf{H}$ vérifie $h^{-1}\tau(h) \in \mathbf{L}$, alors $h \in \mathbf{H}_\tau^\circ \mathbf{L}$.*

(3) *L'application $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{P}_\tau^\circ$ est une bijection entre l'ensemble des sous–groupes paraboliques τ–stables de $\mathbf{H}$ et l'ensemble des sous–groupes paraboliques de $\mathbf{H}_\tau^\circ$. Soit $\mathbf{P}$ un sous–groupe parabolique τ–stable de $\mathbf{H}$. L'application $\mathbf{L} \mapsto \mathbf{L}_\tau^\circ$ est une bijection entre l'ensemble des composantes de Levi τ–stables de $\mathbf{P}$ et l'ensemble des composantes de Levi de $\mathbf{P}_\tau^\circ$, de bijection inverse $\mathbf{L}^\sharp \mapsto Z_{\mathbf{H}}(R(\mathbf{L}^\sharp))$.*

Remarques. — (1) Un automorphisme quasi–semisimple τ de $\mathbf{H}$ est quasi–central si et seulement s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes [**DM1**, déf.–théo. 1.15] :

(i) Tout sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est contenu dans un *unique* sous–groupe de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$.
(ii) Pour toute (resp. pour une) paire de Borel τ–stable $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$, posant $\mathbf{N} = N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})$ et $\mathbf{W} = \mathbf{N}/\mathbf{T}$, tout élément τ–stable de $\mathbf{W}$ a un représentant dans $\mathbf{N} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ$.
(iii) Pour toute (resp. pour une) paire de Borel τ–stable $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$, posant $\Phi = \Phi(\mathbf{T},\mathbf{H})$ et $\Delta = \Delta(\mathbf{T},\mathbf{B})$, les éléments $y_{\tau,\alpha} \in \overline{F}^\times$ (cf. la remarque 4 de 3.7) pour $\alpha \in \Delta$ vérifient la condition [9]

$$y_{\tau,\alpha} \in \{\pm 1\},$$

où -1 n'est autorisé que s'il existe deux racines de la τ–orbite de α dont la somme appartient à Φ.

(2) Soit un élément $h \in \mathbf{H}$ tel que l'automorphisme intérieur $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$ de $\mathbf{H}$ est quasi–central. Alors h appartient au centre $Z(\mathbf{H})$ de $\mathbf{H}$. En effet, puisque $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$ est quasi–semisimple, h est semisimple, donc appartient à un tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$. D'après la condition (ii), tout élément de $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ a un représentant dans $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{H}_\tau^\circ$. Ainsi h est un élément de $\mathbf{T}$ centralisé par $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})$, donc par $\mathbf{H}$ tout entier.

(3) Soit τ un automorphisme quasi–semisimple de $\mathbf{H}$, et $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ une paire de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$. Soit $\alpha \in \Phi(\mathbf{T},\mathbf{H})$, et soit $e_\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbf{U}_\alpha$ un épinglage de $\mathbf{U}_\alpha$. Posons $l = l_{\tau,\alpha}$ comme dans la remarque 4 de 3.7. Pour $t \in \mathbf{T}$, posant $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau$ et $\mathcal{N}_{\tau,\alpha}(t) = t\tau(t)\cdots\tau^{l-1}(t)$, on a $l_{\tau',\alpha} = l$ et

$$\tau'^l \circ e_\alpha(x) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(\mathcal{N}_{\tau,\alpha}(t)) \circ \tau^l \circ e_\alpha(x) = e_\alpha(\alpha(\mathcal{N}_{\tau,\alpha}(t))y_{\tau,\alpha}x) \quad (x \in \overline{F}).$$

L'élément $\alpha(\mathcal{N}_{\tau,\alpha}(t)) \in \overline{F}^\times$ ne dépend pas vraiment de α, mais seulement de la τ–orbite $\mathcal{O}$ de α dans $\Phi(\mathbf{T},\mathbf{H})$. On le note donc aussi $a_{\tau,\mathcal{O}}(t)$. D'après la condition (iii), si l'on choisit t de telle manière que pour chaque τ–orbite $\mathcal{O}$ dans $\Delta(\mathbf{T},\mathbf{B})$, on ait $a_{\tau,\mathcal{O}}(t) = y_{\tau,\mathcal{O}}^{-1}$, alors τ' est quasi–central. ■

3.9. Automorphismes quasi–semisimples localement finis. — La notion d'automorphisme quasi–semisimple est justifiée par le résultat de Steinberg suivant [**St**, 7.5] :

Théorème. — *Tout $\overline{F}$–automorphisme semisimple de $\mathbf{H}$ est quasi–semisimple.*

Remarque 1. — D'après [**St**, 9], si $\tau' \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$ est quasi–semisimple, alors τ' est semisimple si et seulement si l'image de τ' dans $\mathrm{Out}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$ est d'ordre premier à p. ■

Remarque 2. — Supposons $p = 1$, et soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Alors τ est quasi–semisimple si et seulement si τ_{der} est semisimple. D'autre part si τ est localement fini, alors τ est quasi–semisimple si et seulement si τ est semisimple. En effet, supposons τ_{der} semisimple et montrons que τ l'est aussi. Écrivons la décomposition de Jordan $\tau = \tau_{\mathrm{s}} \circ \tau_{\mathrm{u}}$. Puisque τ_{cent} est d'ordre fini et τ_{der} est semisimple, il existe un entier $n \geq 1$ et un élément $h \in \mathbf{H}$ semisimple, tels que $\tau^n = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$. Alors $(\tau^n)_{\mathrm{s}} = (\tau_{\mathrm{s}})^n$ et $(\tau^n)_{\mathrm{u}} = (\tau_{\mathrm{u}})^n$. Mais puisque τ^n est semisimple, on a $(\tau_{\mathrm{u}})^n = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ et τ_{u} est semisimple. Donc $\tau_{\mathrm{u}} = 1$, i.e. τ est semisimple. ■

---

9. D'après les relations de Chevalley, si cette condition est vérifiée pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, alors elle l'est pour toute racine $\alpha \in \Phi$ — cf. [**DM2**]. Par ailleurs, si $y_{\tau,\alpha} = 1$ pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, alors on peut choisir des épinglages $e_\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbf{U}_\alpha$ de $\mathbf{U}_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$ de telle manière que la paire de Borel épinglée $(\mathbf{B},\mathbf{T},\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$ soit τ–stable. Réciproquement, si τ stabilise une paire de Borel épinglée $(\mathbf{B},\mathbf{T},\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$ de $\mathbf{H}$, alors $y_{\tau,\alpha} = 1$ pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, et τ est quasi–central.

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}^0_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Écrivons la décomposition de Jordan $\tau = \tau_{\mathrm{s}} \circ \tau_{\mathrm{u}}$. D'après le théorème 2 de 3.7 (et le théorème ci–dessus), le groupe $\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}}$ est réductif, et puisque $\tau_{\mathrm{s}} \circ \tau_{\mathrm{u}} = \tau_{\mathrm{u}} \circ \tau_{\mathrm{s}}$, τ induit par restriction un $\overline{F}$–automorphisme *unipotent* de $\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}}$, que l'on note τ^*. On a donc l'inclusion $(\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}})_{\tau^*} = \mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}} \cap \mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{u}}} \subset \mathbf{H}_\tau$.

D'après [**DM1**, lemme 1.14 et cor. 1.33], on a la

Proposition. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}^0_{\overline{F}}(\mathbf{H})$.*

(1) *τ est quasi–semisimple si et seulement si τ^* est quasi–semisimple.*

(2) *Si τ est quasi–semisimple et unipotent, alors τ est quasi–central et $\mathbf{H}_\tau$ est connexe.*

Corollaire. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}^0_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ quasi–semisimple. On a l'égalité $\mathbf{H}^\circ_\tau = (\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}})_{\tau^*}$.*

Démonstration. — Puisque $(\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}})_{\tau^*}$ est connexe et contenu dans $\mathbf{H}_\tau$, on a l'inclusion $(\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}})_{\tau^*} \subset \mathbf{H}^\circ_\tau$. Pour l'inclusion inverse, identifions $\mathbf{H}$ à la composante neutre du groupe algébrique affine $\mathbf{H}' = \mathbf{H} \rtimes \langle\tau\rangle/\mathbf{C}$ comme en 3.4 et notons δ l'image de $1 \rtimes \tau$ dans $\mathbf{H}'$. Alors on a $\mathbf{H}^\circ_\tau = (\mathbf{H}'_\delta)^\circ$. Écrivons la décomposition de Jordan $\delta = \delta_{\mathrm{s}}\delta_{\mathrm{u}}$. L'unicité de cette décomposition entraîne l'inclusion $\mathbf{H}'_\delta \subset \mathbf{H}'_{\delta_{\mathrm{s}}} \cap \mathbf{H}'_{\delta_{\mathrm{u}}}$. Or on a $(\mathbf{H}'_{\delta_{\mathrm{s}}})^\circ = \mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}$ et $\mathbf{H}'_{\delta_{\mathrm{u}}} \cap \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{u}}}$, d'où $\mathbf{H}^\circ_\tau \subset \mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}} \cap \mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{u}}} = (\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}})_{\tau^*}$. □

Remarque 3. — Supposons $p = 1$. D'après la remarque (5) de 3.2, tout $\overline{F}$–automorphisme unipotent de $\mathbf{H}$ est de la forme $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u)$ pour un élément unipotent $u \in \mathbf{H}$. En particulier, l'identité de $\mathbf{H}$ est le seul $\overline{F}$–automorphisme quasi–semisimple unipotent de $\mathbf{H}$. ■

Lemme. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ quasi–semisimple et unipotent, et soit $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ une paire de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$. Soit $h \in \mathbf{H}$ tel que $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ est quasi–semisimple. Alors il existe un $t \in \mathbf{T}_\tau$ et un $x \in \mathbf{H}$ tels que $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x^{-1}) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x)$. De plus τ' est unipotent si et seulement si $t = 1$.*

Démonstration. — Puisque τ' est quasi–semisimple, il existe un $x' \in \mathbf{H}$ tel que τ' stabilise la paire de Borel $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x')(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$. Alors $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x'^{-1}h\tau(x')) \circ \tau(\mathbf{B}, \mathbf{T}) = (\mathbf{B}, \mathbf{T})$, d'où $x'^{-1}h\tau(x') \in \mathbf{T}$. D'après la proposition de 3.4, on a la décomposition $\mathbf{T} = \mathbf{T}_\tau\mathbf{T}(1-\tau)$. Écrivons $x'^{-1}h\tau(x') = ty^{-1}\tau(y)$ avec $t \in \mathbf{T}_\tau$ et $y \in \mathbf{T}$. Puisque $ty^{-1}\tau(y) = y^{-1}t\tau(y)$, on obtient
$$\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x'^{-1}h\tau(x')) \circ \tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(y^{-1}) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(y),$$
d'où $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x'y^{-1}) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(yx'^{-1})$.

Si $t = 1$, alors τ' est unipotent. Réciproquement, supposons τ' unipotent et posons $\tau'' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau$. Alors τ'' est quasi–semisimple et unipotent, et comme t appartient à $\mathbf{H}_\tau$, le $\overline{F}$–automorphisme $\tau'' \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \tau''$ de $\mathbf{H}$ est unipotent. Donc $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)$ est unipotent, et $t = 1$. □

3.10. Automorphismes réguliers ; les automorphismes intérieurs. — Pour $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$, on note $r^1_\tau(\mathbf{H})$ le plus petit entier $k \geq 1$ tel que la fonction $\mathbf{H} \to \overline{F}$, $\gamma \mapsto a_k(h, \tau)$ définie par le polynôme en l'indeterminée t
$$P(h, \tau)(t) = \det_{\overline{F}}(t - \mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h) \circ \mathrm{Lie}(\tau) + \mathrm{id}_{\mathfrak{H}}; \mathfrak{H}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(h, \tau)t^i,$$
est non nulle ; et l'on pose
$$D_{\mathbf{H}}(\tau) = a_{r^1_\tau(\mathbf{H})}(1, \tau) \in \overline{F}.$$
On note aussi $r_\tau(\mathbf{H})$ le plus grand entier $k' \geq 1$ vérifiant la propriété : pour tout $h \in \mathbf{H}$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ est quasi–semisimple, on a $k' \leq \dim(\mathbf{H}^\circ_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau})$.

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Pour $x \in \overline{F}^{\times}$, notons $\mathfrak{H}_{\tau}^{x}$ le sous–espace caractéristique de $\mathrm{Lie}(\tau)$ associé à la valeur propre x ; i.e. posons

$$\mathfrak{H}_{\tau}^{x} = \{X \in \mathfrak{H} : (x\mathrm{id}_{\mathfrak{H}} - \mathrm{Lie}(\tau))^{k}(X) = 0,\ \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}.$$

On a la décomposition $\mathfrak{H} = \oplus_{x\in \overline{F}^{\times}} \mathfrak{H}_{\tau}^{x}$. Par définition, on a $\dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}_{\tau}^{1}) \geq r_{\tau}^{1}(\mathbf{H})$ avec égalité si et seulement si $D_{\mathbf{H}}(\tau) \neq 0$, auquel cas on a

$$D_{\mathbf{H}}(\tau) = \det_{\overline{F}}(\mathrm{id} - \mathrm{Lie}(\tau); \mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{\tau}^{1}).$$

Rappelons que $\mathfrak{H}_{\tau} = \ker\{\mathrm{id}_{\mathfrak{H}} - \mathrm{Lie}(\tau)\}$. On a donc les inclusions

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_{\tau}^{\circ}) \subset \mathfrak{H}_{\tau} \subset \mathfrak{H}_{\tau}^{1}$$

avec égalités si τ est semisimple [**Bor**, ch. III, 9.1].

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}^{0}(\mathbf{H})$. Écrivons la décomposition de Jordan $\tau = \tau_{\mathrm{s}} \circ \tau_{\mathrm{u}}$. Alors pour $x \in \overline{F}^{\times}$, on a $\mathfrak{H}_{\tau}^{x} = \mathfrak{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^{x} = \ker\{x\mathrm{id}_{\mathfrak{H}} - \mathrm{Lie}(\tau_{\mathrm{s}})\}$. En particulier, on a l'égalité $\mathfrak{H}_{\tau}^{1} = \mathfrak{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}$, et

$$(*) \qquad D_{\mathbf{H}}(\tau) \neq 0 \Leftrightarrow \dim(\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^{\circ}) = r_{\tau}^{1}(\mathbf{H}).$$

Définition. — Un $\overline{F}$–automorphisme τ de $\mathbf{H}$ est dit *régulier* si $D_{\mathbf{H}}(\tau) \neq 0$.

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. D'après 3.4, pour $z \in R(\mathbf{H})$ et $h' \in \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$, on a

$$\dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(zh')\circ\tau}^{1}) = \dim_{\overline{F}}((\mathfrak{H}_{\mathrm{der}})_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}_{\mathrm{der}}}(h')\circ\tau_{\mathrm{der}}}^{1}) + \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{C}_{\tau_{\mathrm{cocent}}}^{1}).$$

Par suite on a

$$r_{\tau}^{1}(\mathbf{H}) = r_{\tau_{\mathrm{der}}}^{1}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}}) + \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{C}_{\tau_{\mathrm{cocent}}}^{1}),$$

et τ est régulier si et seulement si τ_{der} est régulier.

Soit $\tau \in \mathrm{Int}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Par définition, les entiers $r_{\tau}(\mathbf{H})$ et $r_{\tau}^{1}(\mathbf{H})$ ne dépendent pas de τ. On les note respectivement $r(\mathbf{H})$ et $r^{1}(\mathbf{H})$.

Proposition. — *Soit $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$ pour un $h \in \mathbf{H}$. Alors $D_{\mathbf{H}}(\tau) \neq 0$ si et seulement si h est semisimple et $\mathbf{H}_{h}^{\circ}$ est un tore (i.e. si et seulement si h est « semisimple régulier » au sens de Borel* [**Bor**, ch. IV, 12.2]*). De plus, on a $r(\mathbf{H}) = r^{1}(\mathbf{H})$, et cet entier coïncide avec le rang de $\mathbf{H}$.*

Démonstration. — Écrivons les décompositions de Jordan $h = h_{\mathrm{s}}h_{\mathrm{u}}$ et $\tau = \tau_{\mathrm{s}} \circ \tau_{\mathrm{u}}$. On a $\tau_{\mathrm{s}} = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{s}})$ et $\tau_{\mathrm{u}} = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{u}})$, et d'après la remarque (4) de 3.2, h_{u} appartient à $\mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}^{\circ}$. Puisque τ_{s} est semisimple, on a $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}^{\circ}) = \mathfrak{H}_{\tau_{\mathrm{s}}} = \mathfrak{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^{1}$, et comme le $\overline{F}$–automorphisme τ^{*} de $\mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}^{\circ}$ est unipotent, on a

$$\dim(\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^{\circ}) = \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}) \leq \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}_{\tau}^{1}).$$

Par conséquent si $D_{\mathbf{H}}(\tau) \neq 0$, alors $D_{\mathbf{H}}(\tau_{\mathrm{s}}) \neq 0$. En particulier, il existe un élément semisimple $h' \in \mathbf{H}$ tel que $D_{\mathbf{H}}(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h')) \neq 0$.

Choisissons une paire de Borel $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$ telle que $h_{\mathrm{s}} \in \mathbf{T}$, et posons $\Phi = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{H})$. Alors on a l'inclusion $\mathbf{T} \subset \mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}^{\circ}$, avec égalité si et seulement si pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on a $\alpha(t) \neq 1$ [**Bor**, ch. IV, 12.2]. L'ensemble des $t \in \mathbf{T}$ tels que $\alpha(t) \neq 1$ pour toute racine $\alpha \in \Phi$, est ouvert dense dans $\mathbf{T}$ (en particulier il est non vide). On en déduit que $D_{\mathbf{H}}(\tau_{\mathrm{s}}) \neq 0$ si et seulement si $\mathbf{H}_{h_{\mathrm{s}}}^{\circ} = \mathbf{T}$, auquel cas $h_{\mathrm{u}} = 1$. D'où le lemme. □

Corollaire. — *Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal de $\mathbf{H}$. Pour $t \in \mathbf{T}$, on a $D_{\mathbf{H}}(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)) \neq 0$ si et seulement si $\alpha(t) \neq 1$ pour toute racine $\alpha \in \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{H})$.*

3.11. Automorphismes réguliers ; le cas général. — L'étude des $\overline{F}$–automorphismes extérieurs réguliers de $\mathbf{H}$ est plus compliquée, du moins si $p > 1$.

Lemme 1. — *Supposons qu'il existe un $\overline{F}$–automorphisme régulier τ de $\mathbf{H}$ tel que $\mathfrak{H}_\tau^1 = \mathfrak{H}$. Alors $\mathbf{H}$ est un tore.*

Démonstration. — Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ tel que $D_{\mathbf{H}}(\tau) \neq 0$ et $\mathfrak{H}_\tau^1 = \mathfrak{H}$. Alors pour tout $h \in \mathbf{H}$, on a $\mathfrak{H}^1_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau} = \mathfrak{H}$ et $D_{\mathbf{H}}(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau) \neq 0$. Par suite, quitte à remplacer τ par $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau$ pour un $h \in \mathbf{H}$, on peut supposer τ quasi–semisimple. Ensuite, quitte à remplacer $\mathbf{H}$ par $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$, on peut supposer τ localement fini. Écrivons la décomposition de Jordan $\tau = \tau_{\mathrm{s}}\circ\tau_{\mathrm{u}}$. Puisque $\mathfrak{H}_{\tau_{\mathrm{s}}} = \mathfrak{H}_\tau^1 = \mathfrak{H}$ et $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}}) = \mathfrak{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}$, on a $\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}} = \mathbf{H}$ et $\tau_{\mathrm{s}} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$. Ainsi $\tau = \tau_{\mathrm{u}}$ est régulier, quasi–semisimple et unipotent. D'après le théorème 2 de 3.7, le groupe $\mathbf{H}^\circ_\tau$ est réductif. Soit $\mathbf{T}^\sharp$ un tore maximal de $\mathbf{H}^\circ_\tau$. Alors d'après loc. cit., $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\sharp)$ est un tore maximal (τ–admissible) de $\mathbf{H}$. Notons $\mathbf{\Omega}^\sharp$ l'ensemble des $t \in \mathbf{T}^\sharp$ tels que pour toute racine α de $\mathbf{T}^\sharp$ dans $\mathbf{H}$, on a $\alpha(t) \neq 1$. D'après [**Bor**, ch. III, 9.5], $\mathbf{\Omega}^\sharp$ est non vide, donc ouvert dense dans $\mathbf{T}^\sharp$, et pour $t \in \mathbf{T}^\sharp$, on a $\mathbf{H}^\circ_t = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\sharp) = \mathbf{T}$. Soit $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)\circ\tau$ pour un $t \in \mathbf{\Omega}^\sharp$. Puisque $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)$ est semisimple et commute à τ, on a $(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau)_{\mathrm{s}} = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)$ et $(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau)_{\mathrm{u}} = \tau$, d'où $\mathfrak{H}^1_{\tau'} = \mathfrak{H}_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)} = \mathrm{Lie}(\mathbf{T})$. Par conséquent $\mathfrak{H} = \mathrm{Lie}(\mathbf{T})$, ce qui n'est possible que si $\mathbf{H}$ est un tore. □

Lemme 2. — *Soit τ un $\overline{F}$–automorphisme régulier de $\mathbf{H}$, et posons $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_\tau)$.*

(1) *τ est quasi–semisimple, $\mathbf{H}^\circ_\tau$ est un tore, $\mathbf{T}$ est l'unique tore maximal τ–admissible de $\mathbf{H}$, et $\mathfrak{H}^1_\tau \subset \mathrm{Lie}(\mathbf{T})$.*

(2) *Soit $\mathbf{B}$ est un sous–groupe de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$ contenant $\mathbf{T}$, et posons $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$. L'application $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$, $u \mapsto u\tau(u)^{-1}$ est un automorphisme de variétés algébriques.*

(3) *Supposons τ localement fini. Alors τ_{s} est régulier, $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}})$, et $D_{\mathbf{H}}(\tau) = D_{\mathbf{H}}(\tau_{\mathrm{s}})$.*

Démonstration. — Commençons par montrer que τ est quasi–semisimple. Puisque τ_{der} est régulier, quitte à remplacer $\mathbf{H}$ par $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$, on peut supposer τ localement fini. Écrivons la décomposition de Jordan $\tau = \tau_{\mathrm{s}}\circ\tau_{\mathrm{u}}$, et posons $\mathbf{H}' = \mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}}$. D'après le théorème de 3.9 et le théorème 2 de 3.7, $\mathbf{H}'$ est réductif. Posons $\mathfrak{H}' = \mathrm{Lie}(\mathbf{H}')$. Pour $h' \in \mathbf{H}'$ et $x \in \overline{F}^\times$, puisque $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h')\circ\tau_{\mathrm{s}} = \tau_{\mathrm{s}}\circ\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h')$, les $\overline{F}$–automorphismes $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h')$ et $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h')\circ\mathrm{Lie}(\tau)$ de $\mathfrak{H}$ stabilisent $\mathfrak{H}^x_\tau = \mathfrak{H}^x_{\tau_{\mathrm{s}}}$, et si h' est suffisamment proche de 1 dans $\mathbf{H}'$, alors pour tout $x \in \overline{F}^\times \smallsetminus \{1\}$ tel que $\mathfrak{H}^x_\tau \neq 0$, les valeurs propres de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h')\circ\mathrm{Lie}(\tau)|_{\mathfrak{H}^x_\tau} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{H}^x_\tau)$ sont toutes différentes de 1. Choisissons un tel h', et posons $\tau_1 = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h')\circ\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ et $\tau_1^* = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(h')\circ\tau^* \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}')$. Alors on a $\mathfrak{H}^1_{\tau_1} = \mathfrak{H}'^1_{\tau_1^*} \subset \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}^1_\tau$. Mais puisque τ est régulier, on a $\dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_{\tau_1}) \geq \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}')$. Par conséquent $\mathfrak{H}'^1_{\tau_1^*} = \mathfrak{H}'$. D'autre part, comme l'ensemble des $x \in \mathbf{H}'$ tels que $D_{\mathbf{H}'}(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(x)\circ\tau^*) \neq 0$ est ouvert dense dans $\mathbf{H}'$, on peut supposer τ_1^* régulier. Cela implique que τ^* lui-même est régulier. Comme τ^* est unipotent, d'après le lemme 1, $\mathbf{H}'$ est un tore. Puisqu'un $\overline{F}$–automorphisme d'un tore est automatiquement quasi–semisimple, d'après la proposition de 3.9, on obtient que τ est quasi–semisimple.

Revenons au cas général : $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. Choisissons une paire de Borel τ–stable $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$. Posons $\mathbf{H}^\sharp = \mathbf{H}^\circ_\tau$ et $\mathbf{T}^\sharp = \mathbf{T}\cap\mathbf{H}^\sharp$. D'après le théorème 2 de 3.7, le groupe $\mathbf{H}^\sharp$ est réductif, $\mathbf{T}^\sharp$ est un tore maximal de $\mathbf{H}^\sharp$, et $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\sharp)$.

Montrons que $\mathbf{H}^\circ_\tau = \mathbf{T}^\sharp$ et que $\mathfrak{H}^1_\tau$ est contenu dans $\mathrm{Lie}(\mathbf{T})$. Comme plus haut, pour $h \in \mathbf{H}^\sharp$ et $x \in \overline{F}^\times$, on a $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau(\mathfrak{H}^x_\tau) = \mathfrak{H}^x_\tau$, et si h est suffisamment proche de 1 dans $\mathbf{H}^\sharp$, alors on a $\mathfrak{H}^1_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)\circ\tau} \subset \mathfrak{H}^1_\tau$. D'après la démonstration du lemme 1, il existe un $t \in \mathbf{T}^\sharp$ tel que $\mathfrak{H}^1_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)\circ\tau} \subset \mathfrak{H}^1_\tau$ et $\mathbf{H}^\circ_t = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\sharp) = \mathbf{T}$. Alors on a

$$\mathfrak{H}^1_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)\circ\tau} = \mathfrak{H}^1_\tau \cap \mathfrak{H}^1_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)} = \mathfrak{H}^1_\tau \cap \mathrm{Lie}(\mathbf{T}),$$

et $\dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)\circ\tau}) \leq \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_\tau)$ avec égalité si et seulement si $\mathfrak{H}^1_\tau \subset \mathrm{Lie}(\mathbf{T})$. Puisque τ est régulier, on a donc $\mathfrak{H}^1_\tau \subset \mathrm{Lie}(\mathbf{T})$. Par conséquent

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{H}^\sharp) \subset \mathrm{Lie}(\mathbf{T}) \cap \mathrm{Lie}(\mathbf{H}^\sharp) = \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^\sharp),$$

ce qui n'est possible que si $\mathbf{H}^\sharp = \mathbf{T}^\sharp$. Cela achève la démonstration du point (1).

Montrons (2). Puisque $\mathbf{H}^\circ_\tau \subset \mathbf{T}$ et $\mathbf{H}_\tau/\mathbf{H}^\circ_\tau$ est formé d'éléments semisimples (théorème 2 de 3.7), le morphisme $(1-\tau)|_{\mathbf{U}}$ est injectif. Comme d'après le point (1) — ou d'après la proposition de 3.7 —, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{U}) \cap \mathfrak{H}_\tau = \{0\} = \mathrm{Lie}(\mathbf{U}_\tau),$$

ce morphisme est un automorphisme.

Supposons τ localement fini, et montrons (3). Écrivons la décomposition de Jordan $\tau = \tau_{\mathrm{s}} \circ \tau_{\mathrm{u}}$. Puisque $\tau(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$, on a $\tau_{\mathrm{s}}(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$ et $\tau_{\mathrm{u}}(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$. D'après le premier paragraphe de la démonstration, $\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}}$ est un tore, et d'après le théorème 2 de 3.7, on a $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}}) = \mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_\tau)$. Montrons que τ_{s} est régulier. Soit un élément $h \in \mathbf{H}$ tel que le $\overline{F}$–automorphisme $\sigma = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau_{\mathrm{s}}$ de $\mathbf{H}$ est régulier. Puisque σ est quasi–semisimple (d'après le point (1)), il existe un $x \in \mathbf{H}$ tel que σ stabilise la paire de Borel $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x)(\mathbf{B},\mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$. D'après la relation $(*)$ de 3.2, quitte à remplacer h par $x^{-1}h\tau_{\mathrm{s}}(x)$, on peut supposer que $\sigma(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$. Alors on a $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$, donc $h \in \mathbf{T}$. D'après le point (1), $\mathbf{H}^\circ_\sigma$ est un tore et $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_\sigma) = \mathbf{T}$. On a donc

$$\mathbf{H}^\circ_\sigma = \mathbf{H}^\circ_\sigma \cap \mathbf{T} = \mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}} \cap \mathbf{T} = \mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}}.$$

Comme $\dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_\sigma) \geq \dim(\mathbf{H}^\circ_\sigma) = \dim(\mathbf{H}^\circ_{\tau_{\mathrm{s}}}) = \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_{\tau_{\mathrm{s}}})$, on obtient que τ_{s} est régulier. D'où l'égalité

$$D_{\mathbf{H}}(\tau) = D_{\mathbf{H}}(\tau_{\mathrm{s}}),$$

puisque $\mathfrak{H}^1_\tau = \mathfrak{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}$. □

Lemme 3. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ quasi–semisimple, et soit $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ une paire de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$.*

(1) *Il existe un $t \in \mathbf{T}$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau$ est régulier.*

(2) *Soit $t \in \mathbf{T}$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau$ est régulier. Alors on a $\mathbf{H}^\circ_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)\circ\tau} = \mathbf{T}^\circ_\tau$, et pour tout $u \in R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$, $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(tu) \circ \tau$ est régulier.*

Démonstration. — La démonstration du point (1) est identique à celle du lemme de 3.8.

Montrons (2). Soit $t \in \mathbf{T}$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau$ est régulier. Posons $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t) \circ \tau$. Puisque $\tau'(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$, d'après le lemme 1, $\mathbf{H}^\circ_{\tau'}$ est un sous–tore de $\mathbf{T}$. Par conséquent $\mathbf{H}^\circ_{\tau'} = \mathbf{T}^\circ_{\tau'} = \mathbf{T}^\circ_\tau$. Soit $u \in \mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$, et posons $u' = tut^{-1} \in \mathbf{U}$. Soit $v \in \mathbf{U}$ tel que $u' = v^{-1}\tau'(v)$. Alors on a

$$\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(tu) \circ \tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(v^{-1}) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(\tau'(v)) \circ \tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(v^{-1}) \circ \tau' \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(v),$$

et $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(tu) \circ \tau$ est régulier. □

Théorème. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$.*

(1) *τ est régulier si et seulement si τ est quasi–semisimple et $\mathbf{H}^\circ_\tau$ est un tore.*

(2) *Supposons τ quasi–semisimple. Alors τ est régulier si et seulement si*

$$\dim(\mathbf{H}^\circ_\tau) = r_\tau(\mathbf{H}).$$

(3) *Supposons τ localement fini. Alors τ est régulier si et seulement si τ_{s} est régulier, i.e. si et seulement si $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau_{\mathrm{s}}}$ est un tore. En d'autres termes, on a*

$$D_{\mathbf{H}}(\tau) = D_{\mathbf{H}}(\tau_{\mathrm{s}}).$$

De plus, si τ est régulier, alors on a $r_{\tau_{\mathrm{s}}}(\mathbf{H}) = r^1_{\tau}(\mathbf{H})$.

Démonstration. — Si τ est quasi–semisimple, on choisit une paire de Borel $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ de $\mathbf{G}$ telle que $\tau(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$, et l'on pose $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$.

Montrons (1). Si τ est régulier, alors d'après le lemme 2, τ est quasi–semisimple et $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}$ est un tore ; de plus (loc. cit.) $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}) = \mathbf{T}$ et $\mathfrak{H}^1_{\tau}$ est contenu dans $\mathrm{Lie}(\mathbf{T})$. Réciproquement, supposons que τ est quasi–semisimple et que $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}$ est un tore. On a donc $\tau(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$. Puisque $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}$ est un tore, d'après le théorème 2 de 3.7, on a $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} \subset \mathbf{T}$ et $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau})$ est un tore maximal (τ–admissible) de $\mathbf{H}$, par conséquent $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}) = \mathbf{T}$. Le morphisme $(1-\tau)|_{\mathbf{U}}$ est injectif (cf. la démonstration du point (2) du lemme 2), et puisqu'il est séparable (3.7, proposition), c'est un automorphisme de variété algébrique. On en déduit que

$$\mathfrak{H}^1_{\tau} \cap \mathrm{Lie}(\mathbf{U}) = \{0\}.$$

Le même raisonnement appliqué au radical unipotent $\mathbf{U}^-$ du sous–groupe de Borel $\mathbf{B}^-$ de $\mathbf{H}$ opposé à $\mathbf{B}$ par rapport à $\mathbf{T}$, entraîne que

$$\mathfrak{H}^1_{\tau} \cap \mathrm{Lie}(\mathbf{U}^-) = \{0\}.$$

Par conséquent $\mathfrak{H}^1_{\tau}$ est contenu dans $\mathrm{Lie}(\mathbf{T})$. D'après le lemme 3, il existe un $t \in \mathbf{T}$ tel que $\tau_1 = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)\circ\tau$ est régulier. Puisque $\tau_1(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$, on a $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau_1}) = \mathbf{T}$ et $\mathfrak{H}^1_{\tau_1} \subset \mathrm{Lie}(\mathbf{T})$. On en déduit que

$$\mathfrak{H}^1_{\tau} = \mathfrak{H}^1_{\tau} \cap \mathrm{Lie}(\mathbf{T}) = \mathfrak{H}^1_{\tau_1} \cap \mathrm{Lie}(\mathbf{T}) = \mathfrak{H}^1_{\tau_1}.$$

Par suite $\dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_{\tau}) = r^1_{\tau}(\mathbf{H})$ et τ est régulier.

Supposons τ quasi–semisimple, et montrons (2). D'après (1), il s'agit de montrer que $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}$ est un tore si et seulement si $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}) = r_{\tau}(\mathbf{H})$. Supposons tout d'abord que $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}$ est un tore. Comme $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} \subset \mathbf{T}$ (cf. la démonstration du point (1)), on a $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} = \mathbf{T}^{\circ}_{\tau}$. Soit un élément $h' \in \mathbf{H}$ tel que $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h')\circ\tau$ est quasi–semisimple. On veut montrer que $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'}) \geq \dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau})$. Il existe un $x \in \mathbf{H}$ tel τ' stabilise la paire de Borel $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x)(\mathbf{B},\mathbf{T})$ de $\mathbf{H}$. Puisque $\tau'' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x^{-1})\circ\tau'\circ\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x)$ stabilise $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ et $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'}) = \dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau''})$, quitte à remplacer τ' par τ'', on peut supposer que $\tau'(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$. Alors $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h)(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$, i.e. $h \in \mathbf{T}$. Comme

$$\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'} \supset \mathbf{T}^{\circ}_{\tau'} = \mathbf{T}^{\circ}_{\tau} = \mathbf{H}^{\circ}_{\tau},$$

on a $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'}) \geq \dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau})$. Supposons maintenant que $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}) = r_{\tau}(\mathbf{H})$, et montrons que le groupe réductif connexe $\mathbf{H}' = \mathbf{H}^{\circ}_{\tau}$ est un tore. Soit $\mathbf{T}' = \mathbf{T}\cap\mathbf{H}'$ (c'est un tore maximal de $\mathbf{H}'$). Soit $t' \in \mathbf{T}'$, et posons $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t')\circ\tau'$. D'après la démonstration du point (1) du lemme 2, si t' est suffisamment proche de 1 dans $\mathbf{T}'$, ce que l'on suppose, alors $\mathfrak{H}_{\tau'} = \mathfrak{H}^1_{\tau'}$ est contenu dans $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}')$. Puisque $\mathfrak{H}_{\tau'} = \mathrm{Lie}(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'})$, cela entraîne que $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'}$ est contenu dans $\mathbf{H}'$, puis que $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'} = \mathbf{H}'^{\circ}_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(t')}$. Supposons de plus que t' est régulier dans $\mathbf{H}'$, i.e. que $D_{\mathbf{H}'}(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(t')) \neq 0$. Alors d'après la proposition de 3.10, $\mathbf{H}'^{\circ}_{\mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(t')}$ est un tore. D'autre part comme $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'}) \leq \dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}) = r_{\tau}(\mathbf{H})$, par définition de $r_{\tau}(\mathbf{H})$, on a l'égalité $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'} = \mathbf{H}^{\circ}_{\tau}$. Cela qui achève la démonstration du point (2).

Supposons τ localement fini, et montrons (3). Écrivons la décomposition de Jordan $\tau = \tau_{\mathrm{s}}\circ\tau_{\mathrm{u}}$. D'après le lemme 2, si τ est régulier, alors τ_{s} l'est aussi et on a l'égalité

$$D_{\mathbf{H}}(\tau) = D_{\mathbf{H}}(\tau_{\mathrm{s}}).$$

D'après le point (1), τ_{s} est régulier si et seulement si $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau_{\mathrm{s}}}$ est un tore : τ_{s} est semisimple donc a fortiori quasi–semisimple (théorème 1 de 3.9). Supposons τ_{s} régulier et montrons que τ est régulier. Comme $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau_{\mathrm{s}}}$ est un tore, $\tau^* \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau_{\mathrm{s}}})$ est quasi–semisimple, par conséquent τ est quasi–semisimple (proposition de 3.9). Puisque $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau} \subset \mathbf{H}^{\circ}_{\tau_{\mathrm{s}}}$ et $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau_{\mathrm{s}}}$ est un tore, $\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}$ est un tore. D'après la relation $(*)$ de 3.10, on a $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau_{\mathrm{s}}}) = r^1_{\tau}(\mathbf{H})$, et d'après le point (2), on a $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau_{\mathrm{s}}}) = r_{\tau_{\mathrm{s}}}(\mathbf{H})$, d'où la dernière assertion du point (3). Cela achève la démonstration du théorème. □

Corollaire. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. On a $r_{\tau}(\mathbf{H}) \leq r^1_{\tau}(\mathbf{H})$ avec égalité si et seulement si $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'}) = \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_{\tau'})$ pour un (i.e. pour tout) $h \in \mathbf{H}$ tel que $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ est régulier.*

Démonstration. — Pour $h \in \mathbf{H}$, posant $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$, on a
$$\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'}) \leq \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_{\tau'}) \leq r^1_{\tau'}(\mathbf{H}),$$
d'où l'inégalité $r_{\tau}(\mathbf{H}) \leq r^1_{\tau}(\mathbf{H})$ puisqu'on sait (lemme 2) que si τ' est régulier alors τ' est quasi–semisimple. Si τ' est régulier, alors $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau'}) = r_{\tau}(\mathbf{H})$ et $\dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_{\tau'}) = r^1_{\tau}(\mathbf{H})$. D'où le corollaire. □

Remarque 1. — Pour $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$, puisque
$$\mathrm{Lie}(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}) \subset \mathfrak{H}_{\tau} \subset \mathfrak{H}^1_{\tau},$$
on a $\dim(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}) = \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}^1_{\tau})$ si et seulement si les inclusions ci-dessus sont des égalités. D'autre part si τ est semisimple, on a $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}^{\circ}_{\tau}) = \mathfrak{H}_{\tau} = \mathfrak{H}^1_{\tau}$. On en déduit que s'il existe un élément $h \in \mathbf{H}$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ est semisimple régulier, alors $r_{\tau}(\mathbf{H}) = r^1_{\tau}(\mathbf{H})$. ■

Si $p = 1$, l'absence de $\overline{F}$–automorphismes quasi–semisimples unipotents non triviaux simplifie notablement la situation, du moins pour les automorphismes localement finis :

Lemme 4. — *Supposons $p = 1$, et soit $\tau \in \mathrm{Aut}^0_{\overline{F}}(\mathbf{H})$. On a $r_{\tau}(\mathbf{H}) = r^1_{\tau}(\mathbf{H})$.*

Démonstration. — Puisque τ est localement fini, pour $h \in \mathbf{H}$, $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ est encore localement fini, par conséquent si τ' est régulier, alors τ' est semisimple (d'après la remarque 2 de 3.9). On conclut grâce à la remarque 1 ci–dessus. □

Remarque 2. — Si τ n'est pas localement fini, alors l'inégalité $r_{\tau}(\mathbf{H}) \leq r^1_{\tau}(\mathbf{H})$ est en général stricte (même si $p = 1$). En effet, soit $\mathbf{T}$ le tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, et soit τ le $\overline{F}$–automorphisme de $\mathbf{T}$ défini par $\tau(a,b) = \tau(ab,b)$ $(a,\, b \in \overline{F}^{\times})$; il n'est pas localement fini. Posons $\mathfrak{T} = \mathrm{Lie}(\mathbf{T})$ $(= \overline{F} \times \overline{F})$. On a $\mathrm{Lie}(\tau)(X,Y) = (X+Y,Y)$ $(X,\, Y \in \overline{F})$. Par suite pour $h \in \mathbf{T}$, posant $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$, on a $\mathrm{Lie}(\mathbf{T}_{\tau'}) = \mathfrak{T}_{\tau'} = \{(X,0) : X \in \overline{F}\}$ et $\mathfrak{T}^1_{\tau'} = \mathfrak{T}$. Donc $r_{\tau}(\mathbf{T}) = 1$ et $r^1_{\tau}(\mathbf{T}) = 2$. ■

3.12. Éléments réguliers d'un H–espace tordu. — Il est commode de reformuler les résultats de 3.10 et 3.11 en termes d'espaces tordus (voir 2.4 ; on remplace ici la catégorie des groupes topologiques par celle des groupes algébriques). Comme dans [**La**, I.3], appelons **H**–*espace (algébrique) tordu* la donnée :

– d'un **H**–espace principal homogène $\mathbf{H}^{\natural}$, i.e. une variété algébrique affine $\mathbf{H}^{\natural}$ munie d'une action algébrique de $\mathbf{H}$ à gauche, notée $\mathbf{H} \times \mathbf{H}^{\natural} \to \mathbf{H}^{\natural}$, $(h,\delta) \mapsto h \cdot \delta$, telle que pour tout $\delta \in \mathbf{H}^{\natural}$, l'application $\mathbf{H} \to \mathbf{H}^{\natural}$, $h \mapsto h \cdot \delta$ est un isomorphisme de variétés algébriques ;
– et d'une application $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^{\natural}} : \mathbf{H}^{\natural} \to \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ telle que
$$\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^{\natural}}(h \cdot \delta) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^{\natural}}(\delta) \quad (h \in \mathbf{H}, \delta \in \mathbf{H}^{\natural}).$$

On peut alors définir une action algébrique $\mathbf{H}^\natural \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}^\natural$, $(\delta, h) \mapsto \delta \cdot h$ de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}^\natural$ à droite, qui commute à l'action à gauche :

$$\delta \cdot h = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)(h) \cdot \delta.$$

Pour $h \in \mathbf{H}$, on note $\mathrm{Int}'_{\mathbf{H}}(h) : \mathbf{H}^\natural \rightarrow \mathbf{H}^\natural$ l'automorphisme de variété algébrique défini par

$$\mathrm{Int}'_{\mathbf{H}}(\delta) = h \cdot \delta \cdot h^{-1}.$$

Pour $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$, on peut comme en 2.4 définir le $\mathbf{H}$–espace tordu $\mathbf{H}\tau$. Il s'agit d'une variété algébrique affine, munie :

– d'un isomorphisme de variétés algébriques $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}\tau$, $h \mapsto h\tau$, et d'actions algébriques de $\mathbf{H}$ à gauche $\mathbf{H} \times \mathbf{H}\tau \rightarrow \mathbf{H}\tau$, $(h, h'\tau) \mapsto h \cdot h'\tau$ et à droite $\mathbf{H}\tau \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}\tau$, $(h'\tau, h) \mapsto h'\tau \cdot h$, commutant entre elles et vérifiant l'égalité

$$h \cdot h'\tau \cdot h'' = hh'\tau(h'')\tau \quad (h,\, h',\, h'' \in \mathbf{H});$$

– et d'une application $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}\tau} : \mathbf{H}\tau \rightarrow \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H})$ donnée par

$$\mathrm{Int}_{\mathbf{H}\tau}(h\tau) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau \quad (h \in \mathbf{H}).$$

Mutatis mutandis, le n° 2.4 reste vrai dans ce contexte. En particulier, si $\mathbf{H}^\natural$ est un $\mathbf{H}$–espace tordu, le choix d'un élément $\delta_1 \in \mathbf{H}^\natural$ permet d'identifier $\mathbf{H}^\natural$ et $\mathbf{H}\tau_1$ où $\tau_1 = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta_1)$, mais d'après la remarque 2 de 2.4, cette identification n'est pas canonique.

Soit $\mathbf{H}^\natural$ un $\mathbf{H}$–espace tordu. On note $\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}^\natural} : \mathbf{H}^\natural \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{H})$ l'application $\delta \mapsto \mathrm{Lie}(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta))$. On a donc

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}^\natural}(h \cdot \delta) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(h) \circ \mathrm{Ad}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta) \quad (h \in \mathbf{H},\, \delta \in \mathbf{H}^\natural).$$

On note $D_{\mathbf{H}^\natural} : \mathbf{H}^\natural \rightarrow \overline{F}$ la fonction définie par

$$D_{\mathbf{H}^\natural}(\delta) = D_{\mathbf{H}}(\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)).$$

Pour $\delta \in \mathbf{H}^\natural$ et $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$, on remplace l'indice τ par un indice δ dans toutes les notations précédentes — i.e. on pose $\mathbf{H}_\delta^\circ = \mathbf{H}_\tau^\circ$, $\mathfrak{H}_\delta^1 = \mathfrak{H}_\tau^1$, (etc.). Puisque $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(h \cdot \delta) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau$ $(h \in \mathbf{H})$, on a $\tau \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}^0(\mathbf{H})$ si et seulement si $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta') \in \mathrm{Aut}_{\overline{F}}^0(\mathbf{H})$ pour tout $\delta' \in \mathbf{H}^\natural$; auquel cas on dit que $\mathbf{H}^\natural$ est *localement fini*. Par définition, les entiers $r_\delta(\mathbf{H})$ et $r_\delta^1(\mathbf{H})$ ne dépendent pas de l'élément $\delta \in \mathbf{H}^\natural$. On les note $r(\mathbf{H}^\natural)$ et $r^1(\mathbf{H}^\natural)$. L'entier $r(\mathbf{H}^\natural)$ est appelé *rang (absolu) de* $\mathbf{H}^\natural$.

Un élément $\delta \in \mathbf{H}^\natural$ est dit *quasi–semisimple* (resp. *quasi–central*, *semisimple*, *unipotent*, *régulier*) si le $\overline{F}$–automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$ de $\mathbf{H}$ est quasi–semisimple (resp. quasi–central, semisimple, unipotent, régulier). Ces notions sont stables par $\mathbf{H}$–conjugaison. Notons que si $\mathbf{H}^\natural$ n'est pas localement fini, alors aucun élément de $\mathbf{H}^\natural$ n'est semisimple (resp. unipotent).

On note $\mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbf{H}^\natural$. Par définition, la fonction

$$\mathbf{H}^\natural \rightarrow \overline{F},\ \delta \mapsto D_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$$

appartient à l'algèbre affine $\overline{F}[\mathbf{H}^\natural]$. Puisque l'ensemble $\mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$ est non vide, il est ouvert dense dans $\mathbf{H}^\natural$. D'après le théorème de 3.11, un élément $\delta \in \mathbf{H}^\natural$ est régulier si et seulement s'il est quasi–semisimple et $\mathbf{H}_\delta^\circ$ est un tore. D'après le corollaire de 3.11, on a

$$r(\mathbf{H}^\natural) \leq r^1(\mathbf{H}^\natural) \tag{$*$}$$

avec égalité si et seulement s'il existe un élément $\delta \in \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$ tel que $\dim(\mathbf{H}_\delta^\circ) = \dim_{\overline{F}}(\mathfrak{H}_\delta^1)$.

3.13. Tores maximaux et sous–espaces de Cartan d'un H–espace tordu. — Soit $\mathbf{H}^\natural$ un $\mathbf{H}$–espace tordu. Soit $\delta \in \mathbf{H}^\natural$, et posons $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$. Soit $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ une paire de Borel de $\mathbf{H}$ telle que $\tau(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$. Posons $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$, et soit u_0 l'unique élément de $\mathbf{U}$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u_0) \circ \tau$ stabilise $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$. Posons $\delta_0 = u_0 \cdot \delta$ et $\tau_0 = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(\delta_0)$. Puisque $\tau_0(\mathbf{B}, \mathbf{T}) = (\mathbf{B}, \mathbf{T})$, δ_0 est quasi–semisimple. Posons $\mathbf{S} = \mathbf{T}^\circ_{\delta_0}$ $(= \mathbf{T} \cap \mathbf{H}^\circ_{\delta_0})$. D'après le lemme 3 de 3.11, on a la

Proposition. — (1) *Tout élément régulier de* $\mathbf{H}^\natural$ *est de la forme* $x^{-1} \cdot (t \cdot \delta_0) \cdot x$ *pour un* $t \in \mathbf{T}$ *et un* $x \in \mathbf{H}$.

(2) *L'ensemble* $(\mathbf{T} \cdot \delta_0) \cap \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$ *est ouvert dense dans* $\mathbf{T} \cdot \delta_0$.

(3) *Pour* $\delta \in (\mathbf{T} \cdot \delta_0) \cap \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$, *on a* $\mathbf{H}^\circ_\delta = \mathbf{S}$.

Partons maintenant d'un élément $\delta'_0 \in \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$, et posons $\mathbf{S}^\natural = \mathbf{H}^\circ_{\delta'_0} \cdot \delta'_0$. Le centralisateur

$$Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}^\natural) = \{h \in \mathbf{H} : \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\gamma)(h) = h,\ \forall \gamma \in \mathbf{S}^\natural\}$$

est un tore de $\mathbf{H}$, disons $\mathbf{S}$. Pour $\delta \in \mathbf{S}^\natural$, on a $\mathbf{S}^\natural = \mathbf{S} \cdot \delta$ et $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)|_{\mathbf{S}} = \mathrm{id}_{\mathbf{S}}$. Cela munit $\mathbf{S}^\natural$ d'une structure de $\mathbf{S}$–espace tordu trivial. Le groupe $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ est un tore maximal de $\mathbf{H}$: pour $\delta \in \mathbf{S}^\natural \cap \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$, on a $\mathbf{H}^\circ_\delta = \mathbf{S}$ — en particulier on a $\mathbf{H}^\circ_{\delta'_0} = \mathbf{S}$ — et $\mathbf{T}$ est l'unique tore maximal $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$–admissible de $\mathbf{H}$. Posons

$$\mathbf{T}^\natural = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^\natural = \mathbf{S}^\natural \cdot \mathbf{T} \subset \mathbf{H}^\natural.$$

Pour $\delta \in \mathbf{T}^\natural$, on a $\mathbf{T}^\natural = \mathbf{T} \cdot \delta$ et $\mathrm{Int}_{\mathbf{T}^\natural}(\delta) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)|_{\mathbf{T}}$ est un $\overline{F}$–automorphisme de $\mathbf{T}$. Cela munit $\mathbf{T}^\natural$ d'une structure de $\mathbf{T}$–espace tordu. Pour $\delta \in \mathbf{T}^\natural \cap \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$, on a $\mathbf{H}^\circ_\delta = \mathbf{S}$. De plus, on a $Z(\mathbf{T}^\natural) = \mathbf{S}$ où (rappel) $Z(\mathbf{T}^\natural)$ est le centralisateur de $\mathbf{T}^\natural$ dans $\mathbf{T}$, défini par

$$Z(\mathbf{T}^\natural) = \{t \in \mathbf{T} : \mathrm{Int}_{\mathbf{T}^\natural}(\gamma)(t) = t,\ \forall \gamma \in \mathbf{T}^\natural\}.$$

Puisque

$$Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\natural) \subset Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}^\natural) = \mathbf{S} = Z(\mathbf{T}^\natural) \subset Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\natural),$$

les deux inclusions ci–dessus sont des égalités.

Définitions. — On appelle :
- tore maximal de $\mathbf{H}^\natural$ une partie $\mathbf{S}^\natural$ de la forme $\mathbf{S}^\natural = \mathbf{H}^\circ_\delta \cdot \delta$ pour un $\delta \in \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$;
- sous–espace de Cartan de $\mathbf{H}^\natural$ une partie $\mathbf{T}^\natural$ de la forme $\mathbf{T}^\natural = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_\delta) \cdot \delta$ pour un $\delta \in \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$.

D'après la proposition, les tores maximaux (resp. sous–espaces de Cartan) de $\mathbf{H}^\natural$ sont deux–à–deux conjugués dans $\mathbf{H}$. On a les propriétés :
- Tout tore maximal $\mathbf{S}^\natural$ de $\mathbf{H}^\natural$ détermine un quadruplet $(\mathbf{S}, \mathbf{S}^\natural, \mathbf{T}, \mathbf{T}^\natural)$, qu'on appelle le *quadruplet de Cartan de* $\mathbf{H}^\natural$ *associé à* $\mathbf{S}^\natural$: on a $\mathbf{S} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}^\natural)$, $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ et $\mathbf{T}^\natural = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^\natural$;
- Tout sous–espace de Cartan $\mathbf{T}^\natural$ de $\mathbf{H}^\natural$ détermine un triplet $(\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^\natural)$, qu'on appelle le *triplet de Cartan de* $\mathbf{H}^\natural$ *associé à* $\mathbf{T}^\natural$: on a $\mathbf{S} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\natural)$ et $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$.
- Fixé un sous–espace de Cartan $\mathbf{T}^\natural$ de $\mathbf{H}^\natural$, l'application qui à $\delta \in \mathbf{T}^\natural$ associe la partie $\mathbf{S} \cdot \delta$ de $\mathbf{H}^\natural$ est une bijection du $\mathbf{S} \backslash \mathbf{T}$–espace tordu $\mathbf{S} \backslash \mathbf{T}^\natural$ sur l'ensemble des tores maximaux $\mathbf{S}^\natural$ de $\mathbf{H}^\natural$ tels que $Z_{\mathbf{H}}(Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}^\natural)) \cdot \mathbf{S}^\natural = \mathbf{T}^\natural$.

3.14. Orbites dans un H–espace tordu. — Soit $\mathbf{H}^\natural$ un $\mathbf{H}$–espace tordu. Considérons l'action de $\mathbf{H}$ (à droite) sur $\mathbf{H}^\natural$ par conjugaison :

$$\mathbf{H}^\natural \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}^\natural,\ (\delta, h) \mapsto h^{-1}\cdot \delta \cdot h = h^{-1}\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)(h)\cdot \delta.$$

Pour $\delta \in \mathbf{H}^\natural$, on note $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ la $\mathbf{H}$–orbite $\{h^{-1}\cdot\delta\cdot h : h \in \mathbf{H}\}$; posant $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$, on a

$$\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta) = \mathbf{H}(1-\tau)\cdot\delta.$$

D'après [**Bor**, ch. I, 1.8], $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est une variété algébrique lisse, et sa fermeture $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)}$ dans $\mathbf{H}^\natural$ est réunion de $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ et de $\mathbf{H}$–orbites de dimension strictement inférieure à $\dim(\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta))$. En particulier, la $\mathbf{H}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est ouverte dans $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)}$ et localement fermée dans $\mathbf{H}^\natural$. Le groupe $\mathbf{H}_\delta$ ($=\{h\in\mathbf{H} : \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)(h) = h\}$) coïncide avec le stabilisateur de δ dans $\mathbf{H}$, et le morphisme de variétés algébriques $\pi_\delta : \mathbf{H}\to\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$, $h\mapsto h^{-1}\cdot\delta\cdot h$ se factorise à travers le quotient $\mathbf{H}_\delta\backslash\mathbf{H}$. On obtient donc un morphisme bijectif $\bar{\pi}_\delta : \mathbf{H}_\delta\backslash\mathbf{H}\to\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$, qui n'est en général pas un isomorphisme. On a l'égalité $(*)$ de 3.1

$$\dim(\mathbf{H}) = \dim(\mathbf{H}_\delta) + \dim(\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)),$$

et $\bar{\pi}_\delta$ est un isomorphisme si et seulement si le morphisme π_δ est séparable, i.e. si et seulement si $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_\delta) = \ker(\mathrm{d}(\pi_\delta)_1)$.

Lemme. — *Soit deux éléments δ, $\delta'\in\mathbf{H}^\natural$ quasi–semisimples et unipotents. On a*

$$\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta') = \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta).$$

Démonstration. — Posons $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$ et $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta')$. D'après le lemme de 3.9, il existe un $x\in\mathbf{H}$ tel que

$$\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x^{-1})\circ\tau\circ\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x)\ (=\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(x^{-1}\cdot\delta\cdot x)).$$

Par conséquent $\delta' = zx^{-1}\cdot\delta\cdot x$ pour un élément $z\in Z(G)$, et quitte à remplacer δ' par $x\cdot\delta\cdot x^{-1}$, on peut supposer que $\delta' = z\cdot\delta$, i.e. que $\tau'=\tau$. Notons que si $p=1$, alors $\tau = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, et si $p>1$, alors $\tau^{p^k} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ pour un entier $k\geq 1$. Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal τ–stable de $\mathbf{H}$. Puisque la restriction de τ à $\mathbf{T}$ est un automorphisme unipotent de $\mathbf{T}$, d'après la proposition de 3.4, l'élément z s'écrit $z = ut^{-1}\tau(t)$ pour des éléments $u\in\mathbf{T}_\tau$ et $t\in\mathbf{T}$. Comme τ est un automorphisme localement fini de $\mathbf{H}$, on peut comme en 3.4 identifier $\mathbf{H}$ à la composante neutre d'un groupe algébrique affine $\mathbf{H}' = (\mathbf{H}\rtimes\langle\tau\rangle)/\mathbf{C}$. On identifie $\mathbf{H}^\natural$ à l'image de $\mathbf{H}\rtimes\langle\tau\rangle$ dans $\mathbf{H}'$ via l'application $h\cdot\delta\mapsto(h,\tau)$. Alors δ s'identifie à l'image de $(1,\tau)$ dans $\mathbf{H}'$, et $t\cdot\delta'\cdot t'^{-1}$ s'identifie à l'image de (u,τ) dans $\mathbf{H}'$. Les éléments δ^{-1} et $t\cdot\delta'\cdot t^{-1}$ de $\mathbf{H}'$ sont unipotents, et comme ils commutent, leur produit $u\in\mathbf{T}$ est encore unipotent. Donc $u=1$, et $\delta' = t^{-1}\cdot\delta\cdot t$. □

Proposition. — *Soit $\delta\in\mathbf{H}^\natural$. La $\mathbf{H}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est fermée dans $\mathbf{H}^\natural$ si et seulement si δ est quasi–semisimple.*

Démonstration. — Posons $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$. Comme $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta) = \mathbf{H}(1-\tau)\cdot\delta$, si $\mathbf{H}$ est un tore, l'énoncé est vide : $\mathbf{H}(1-\tau)$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}$, et τ est quasi–semisimple. On suppose donc que $\mathbf{H}$ n'est pas un tore.

Supposons δ quasi–semisimple. Soit $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ une paire de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$, et soit $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$. Pour $t\in\mathbf{T}$ et $u\in\mathbf{U}$, posant $\delta' = t^{-1}\cdot\delta\cdot t$, on a

$$\begin{aligned}(tu)^{-1}\cdot\delta\cdot tu &= u^{-1}\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta')(u)\cdot\delta'\\ &= u^{-1}\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta')(u)t^{-1}\tau(t)\cdot\delta\end{aligned}$$

où $u^{-1}\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta')(u) \in \mathbf{U}$ et $t^{-1}\tau(t) \in \mathbf{T}(1-\tau)$. Par conséquent la $\mathbf{B}$–orbite

$$\mathcal{O}_{\mathbf{B}}(\delta) = \{b^{-1}\cdot\delta\cdot b : b \in \mathbf{B}\}$$

vérifie la double inclusion

$$\mathbf{T}(1-\tau)\cdot\delta \subset \mathcal{O}_{\mathbf{B}}(\delta) \subset \mathbf{UT}(1-\tau)\cdot\delta.$$

Or $\mathbf{UT}(1-\tau) = \mathbf{T}(1-\tau)\mathbf{U}$ est un sous–groupe fermé τ–stable de $\mathbf{B}$. Pour $b \in \mathbf{B}$, $u' \in \mathbf{U}$ et $t' \in \mathbf{T}(1-\tau)$, on a

$$b^{-1}\cdot(u't'\cdot\delta)\cdot b = (b^{-1}ub)(b^{-1}t'\tau(b))\cdot\delta$$

où $b^{-1}ub \in \mathbf{U}$ et $b^{-1}t'\tau(b) \in \mathbf{UT}(1-\tau)$. Par conséquent $\mathbf{UT}(1-\tau)\cdot\delta$ est une sous–variété fermée de $\mathbf{H}^\natural$, stable par $\mathbf{B}$–conjugaison. Posons $\Phi = \Phi(\mathbf{T},\mathbf{H})$ et $\Delta = \Delta(\mathbf{T},\mathbf{B})$. Soit $\mathbf{T}_*$ le sous–groupe fermé de $\mathbf{T}\cap\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ défini par

$$\mathbf{T}_* = \{t \in \mathbf{T}\cap\mathbf{H}_{\mathrm{der}} : \alpha(t) = \beta(t),\ \forall\alpha,\,\beta\in\Delta\}.$$

Sa composante neutre $\mathbf{T}_*^\circ$ est un tore de dimension 1. De plus, on a l'inclusion $\mathbf{T}_*^\circ \subset \mathbf{H}_\tau^\circ$. En effet, puisque $\mathbf{T}$ est τ–stable, τ opère sur Φ : pour $\alpha\in\Phi$, on pose $\tau(\alpha) = \alpha\circ\tau^{-1}$. Comme $\mathbf{B}$ est τ–stable, on a $\tau(\Delta) = \Delta$. On en déduit que $\mathbf{T}_*$ est τ–stable, et que $\alpha(\tau(t)) = \alpha(t)$ ($\alpha\in\Delta$, $t\in\mathbf{T}$). Par suite $\mathbf{T}_*^\circ$ est τ–stable, et comme le seul $\overline{F}$–automorphisme non trivial de $\mathbf{T}_*^\circ$ est le passage à l'inverse $t\mapsto t^{-1}$, on obtient que $\tau|_{T_*^\circ} = \mathrm{id}$. D'où l'inclusion cherchée. Soit $\delta' \in \mathbf{UT}(1-\tau)\cdot\delta$. Écrivons $\delta' = u't^{-1}\tau(t)\cdot\delta$ avec $u'\in\mathbf{U}$ et $t\in\mathbf{T}$, et posons $v = t'ut'^{-1}\in\mathbf{U}$. Alors on a $t\cdot\delta'\cdot t^{-1} = v\cdot\delta$. D'après la proposition de 3.10, l'ensemble $\mathbf{T}_*^\circ\cap\mathbf{H}_{\mathrm{reg}}$ est non vide, et la fermeture $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{T}_*^\circ}(v)}$ de la $\mathbf{T}_*^\circ$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{T}_*^\circ}(v) = \{tvt^{-1} : t\in\mathbf{T}_*^\circ\}$ dans $\mathbf{U}$ contient 1. Par suite $\delta\in\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{T}}(\delta')}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{B}}(\delta)\subset\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{B}}(\delta')}$, où les fermetures sont dans $\mathbf{UT}(1-\tau)\cdot\delta$). En choisissant δ' tel que la $\mathbf{B}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{B}}(\delta')$ soit fermée dans $\mathbf{UT}(1-\tau)\cdot\delta$ [**Bor**, ch. I, cor. 1.8], on obtient que la $\mathbf{B}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{B}}(\delta)$ est fermée dans $\mathbf{H}^\natural$. Et comme la variété quotient $\mathbf{H}/\mathbf{B}$ est complète, on en déduit que la $\mathbf{H}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est fermée dans $\mathbf{H}^\natural$.

Réciproquement, supposons $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)} = \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$. Soit $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ une paire de Borel de $\mathbf{H}$ telle que $\tau(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$, et soit u l'unique élément de $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$ tel que $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u)\circ\tau(\mathbf{B},\mathbf{T}) = (\mathbf{B},\mathbf{T})$. Posons $\delta' = u\cdot\delta$ et $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(\delta')$. On définit comme plus haut le sous–tore $\mathbf{T}_*^\circ$ de $\mathbf{T}$. D'après le paragraphe précédent, on a l'inclusion $\mathbf{T}_*^\circ\subset\mathbf{H}_{\tau'}^\circ$, et la fermeture $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{T}_*^\circ}(u^{-1}\cdot\delta')}$ de la $\mathbf{T}_*^\circ$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{T}_*^\circ}(u^{-1}\cdot\delta')$ contient δ'. Or $u^{-1}\cdot\delta' = \delta$ et la $\mathbf{H}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est fermée dans $\mathbf{H}^\natural$. Par conséquent $\delta'\in\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ et δ est quasi–semisimple. □

Corollaire 1. — *Pour $\delta\in\mathbf{H}_{\mathrm{reg}}^\natural$, la $\mathbf{H}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est fermée dans $\mathbf{H}^\natural$.*

Remarque. — On peut aussi prouver le corollaire 1 directement, grâce à la relation $(*)$ de 3.1. En effet, soit $\delta\in\mathbf{H}_{\mathrm{reg}}^\natural$ et soit $\delta'\in\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)}$. Pour h, $x\in\mathbf{H}$, puisque

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}^\natural}(x\cdot\delta\cdot x^{-1}) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(x)\circ\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)\circ\mathrm{Ad}_{\mathbf{H}}(x)^{-1},$$

posant $P(h,\delta) = P(h,\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(\delta))$ comme en 3.10, on a

$$P(xhx^{-1}, x\cdot\delta\cdot x^{-1}) = P(h,\delta).$$

Par continuité, on en déduit que $P(1,\delta') = P(1,\delta)$. En particulier, on a $D_{\mathbf{H}}(\delta') = D_{\mathbf{H}}(\delta)\neq 0$. Puisque $\delta'\in\mathbf{H}_{\mathrm{reg}}^\natural$, d'après le théorème de 3.11, on a $\dim(\mathbf{H}_{\delta'}^\circ) = r(\mathbf{H}^\natural) = \dim(\mathbf{H}_\delta^\circ)$. Grâce à la relation $(*)$ de 3.1, on obtient

$$\dim(\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta')) = \dim(\mathbf{H}) - r(\mathbf{H}^\natural) = \dim(\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)).$$

Comme $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta')\subset\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)}$, cela entraîne que δ' appartient à $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$. ■

Corollaire 2. — *Soit un élément $\delta \in \mathbf{H}^\natural$ unipotent. La fermeture $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)}$ est réunion de $\mathbf{H}$–orbites unipotentes, et contient une unique $\mathbf{H}$–orbite fermée. Cette dernière est l'unique $\mathbf{H}$–orbite quasi–semisimple unipotente de $\mathbf{H}^\natural$.*

Démonstration. — Puisque δ est unipotent, tout élément de $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)}$ l'est aussi. Par suite $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)}$ est réunion de $\mathbf{H}$–orbites unipotentes. Soit $\mathcal{O}$ une $\mathbf{H}$–orbite dans $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)}$ de dimension minimale. Elle est fermée dans $\mathbf{H}^\natural$, donc quasi–semisimple (proposition), et d'après le lemme, $\mathcal{O}$ est l'unique $\mathbf{H}$–orbite quasi–semisimple unipotente de $\mathbf{H}^\natural$. □

4. Questions de rationnalité

Continuons avec les hypothèses et les notations du ch. 3 : F est un corps commutatif d'exposant caractéristique $p \geq 1$, $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F, et $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\overline{F})$ est un groupe algébrique. On suppose de plus que $\mathbf{H}$ est connexe, réductif et défini sur F, et l'on note $H = \mathbf{H}(F)$ le groupe de ses points F–rationnels. À l'exception du n° 4.9, les notions topologiques se réfèrent toujours à la topologie de Zariski.

4.1. Généralités (rappels). — Soit F^{sep}/F la sous–extension séparable maximale de $\overline{F}/F$, et soit $\Sigma = \Sigma(F^{\mathrm{sep}}/F)$ son groupe de Galois.

Soit $\mathbf{V}$ une variété algébrique définie sur F. Pour toute extension F' de F, on note $\mathbf{V}(F')$ l'ensemble de ses points F'–rationnels. D'après [**Bor**, ch. AG, 13.3], $\mathbf{V}(F^{\mathrm{sep}})$ est dense dans $\mathbf{V}$ (pour la topologie de Zariski). Une partie fermée de $\mathbf{V}$ est dite *F–fermée*[10] *(dans $\mathbf{V}$)* si elle est définie sur une sous–extension purement inséparable de $\overline{F}/F$; ou, ce qui revient au même, si elle est définie sur $F^{p^{-\infty}}$. Ainsi, toute partie fermée de $\mathbf{V}$ est F^{sep}–fermée, et toute partie F–fermée de $\mathbf{V}$ définie sur F^{sep} est définie sur F. En particulier si $p = 1$, toute partie F–fermée de $\mathbf{V}$ est définie sur F.

Soit $\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un morphisme de variétés algébriques. Supposons que $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ et π sont définis sur F. Alors l'image $\mathbf{W}' = \pi(\mathbf{V})$ est définie sur F. On a l'inclusion $\pi(\mathbf{V}(F)) \subset \mathbf{W}'(F)$ mais cette inclusion est en général stricte — même si le morphisme $\mathbf{V} \xrightarrow{\pi} \mathbf{W}'$ est séparable, et que $F = F^{\mathrm{sep}}$.

Remarque 1. — Si $(\mathbf{W}', \pi)$ est « le » quotient de $\mathbf{V}$ par un groupe algébrique affine $\mathbf{H}'$ défini sur F, alors par homogénéité d'après [**Bor**, ch. AG, 13.2], on a l'égalité

$$\pi(\mathbf{V}(F^{\mathrm{sep}})) = \mathbf{W}'(F^{\mathrm{sep}}). \qquad ■$$

Soit $\mathbf{H}'$ un groupe algébrique affine défini sur F. Sa composante neutre $\mathbf{H}'^{\circ}$ est elle aussi définie sur F [**Bor**, ch. I, 1.2], et ses composantes connexes sont toutes définies sur F^{sep}

10. Soit $\mathbf{H}'$ un groupe algébrique affine défini sur F. Notons $\mathcal{H}'$ le F-schéma en groupes affine lisse d'algèbre affine $F[\mathbf{H}']$. Les parties F–fermées (resp. fermées et définies sur F) de $\mathbf{H}'$ correspondent bijectivement aux sous–F-schémas fermés *réduits* (resp. *géométriquement réduits*) de $\mathcal{H}'$: les unes et les autres correspondent bijectivement aux idéaux I de $F[\mathbf{H}']$ tels que la F–algèbre $F[\mathbf{H}']/I$ est réduite (resp. tels que la $\overline{F}$–algèbre $\overline{F} \otimes_F F[\mathbf{H}']/I$ est réduite). À tout sous groupe fermé de $\mathbf{H}'$ défini sur F correspond ainsi un sous–F–schéma en groupes fermé lisse de $\mathcal{H}'$, et réciproquement.

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}')$. Le groupe $\mathbf{H}'_\tau$ est F–fermé dans $\mathbf{H}'_\tau$, donc correspond à un sous–F-schéma fermé réduit $\mathcal{H}'_\tau$ de $\mathcal{H}'$. On a $\mathbf{H}'_\tau = \mathcal{H}'_\tau(\overline{F})$, et $\mathbf{H}'_\tau$ est défini sur F si et seulement si $\mathcal{H}'_\tau$ est géométriquement réduit, i.e. est un F-schéma en groupes lisse.

[**Bor**, ch. AG, 12.13]. On a donc $\mathbf{H}' = \mathbf{H}'(F^{\mathrm{sep}})\mathbf{H}'^{\circ}$. D'après [**Bor**, ch. V, 18.2], il existe un tore maximal de $\mathbf{H}'^{\circ}$ défini sur F. Rappelons que $\mathbf{H}'$ est *déployé sur* F s'il existe une suite

$$\{1\} = \mathbf{H}'_n \subset \mathbf{H}'_{n-1} \subset \cdots \subset \mathbf{H}'_1 = \mathbf{H}'$$

de sous–groupes définis sur F, tels que pour $i = 1, \ldots, n-1$, $\mathbf{H}'_{i+1}$ est distingué dans $\mathbf{H}'_i$ et le groupe quotient $\mathbf{H}'_i/\mathbf{H}'_{i+1}$ est F–isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ ou au groupe additif $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. Si $\mathbf{H}'$ est diagonalisable (e.g. un tore), alors $\mathbf{H}'$ se déploie sur une sous–extension galoisienne finie de F^{sep}/F [**Bor**, ch. III, 8.11].

Soit $\mathbf{V}$ une variété algébrique définie sur F, munie d'une action algébrique de $\mathbf{H}'$ à gauche $\mathbf{H}' \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $(h, v) \mapsto h \cdot v$, elle aussi définie sur F. Pour $v \in \mathbf{V}(F)$, la variété (lisse) $\mathbf{H}' \cdot v$ est définie sur F, et le groupe $\mathbf{H}'_v$ est F–fermé dans $\mathbf{H}'$. Si de plus le morphisme $\pi_v : \mathbf{H}' \to \mathbf{V}$, $h \mapsto h \cdot v$ est séparable, alors $\mathbf{H}'_v$ est défini sur F [**Bor**, ch. II, 6.7]. D'autre part, si le groupe $\mathbf{H}'$ est connexe, résoluble et F–déployé, et s'il opère transitivement sur $\mathbf{V}$, alors $\mathbf{V}$ est affine et possède un point F–rationnel [**Bor**, ch. V, 15.11].

Remarque 2. — Soit $\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un morphisme de variétés algébriques. Supposons que $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ et π sont définis sur F. Supposons aussi que $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}' = \pi(\mathbf{V})$ sont irréductibles, et que $\mathbf{V}$ est muni d'une action algébrique (à gauche) de $\mathbf{H}'$, définie sur F, telle que les fibres de π sont les orbites sous $\mathbf{H}'$; où $\mathbf{H}'$ est toujours un groupe algébrique affine défini sur F. Si le morphisme $\mathbf{V} \xrightarrow{\pi} \mathbf{W}'$ est séparable — en particulier si $(\mathbf{W}', \pi)$ est « le » quotient de $\mathbf{V}$ par $\mathbf{H}'$ — et si $\mathbf{H}'$ est connexe, résoluble et F–déployé, alors d'après [**Bor**, ch. V, 15.12], on a l'égalité

$$\pi(\mathbf{V}(F)) = \mathbf{W}(F). \qquad \blacksquare$$

4.2. Généralités ; suite. — Les résultats ci–dessous sont valables pour n'importe quel groupe algébrique $\mathbf{H}$ réductif connexe et défini sur F :

– $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ est défini sur F [**Bor**, ch. I, cor. 2.3] ;
– $Z(\mathbf{H})$ est défini sur F [**Bor**, ch. V, 18.2], et donc aussi $R(\mathbf{H}) = Z(\mathbf{H})^{\circ}$ [**Bor**, ch. I, 1.2] ;
– $\mathbf{H}$ est déployé sur F si et seulement s'il existe un tore maximal de $\mathbf{H}$ défini et déployé sur F [**Bor**, ch. V, 18.7] ;
– si $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{H}$ défini et déployé sur une sous–extension F'/F de $\overline{F}/F$, alors tout sous–groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{H}$ contenant $\mathbf{T}$ est défini et déployé sur F' (cf. la démonstration de loc. cit.) ;
– si $\mathbf{S}$ est un tore de $\mathbf{H}$ défini sur F, alors $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ et $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ sont définis sur F [**Bor**, ch. III, cor. 9.2 et ch. V, 20.3] ; si de plus $\mathbf{S}$ est déployé sur F, alors $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ est une composante de Levi d'un sous–groupe parabolique de $\mathbf{H}$ défini sur F [**Bor**, ch. V, 20.4] ;
– si $\mathbf{P}$ est un sous–groupe parabolique de $\mathbf{H}$ défini sur F, alors $R(\mathbf{P})$ et $R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P})$ sont définis sur F, et les composantes de Levi définies sur F de $\mathbf{P}$ sont les centralisateurs dans $\mathbf{H}$ des tores maximaux définis sur F de $R(\mathbf{P})$ [**Bor**, ch. 20, 20.5] ;
– si $\mathbf{M}$ est une composante de Levi définie sur F d'un sous–groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{H}$ défini sur F, alors le sous–groupe parabolique de $\mathbf{H}$ opposé à $\mathbf{P}$ par rapport à $\mathbf{M}$, est défini sur F [**Bor**, ch. V, 20.5], et notant $\mathbf{S}$ le sous–tore F–déployé maximal de $R(\mathbf{M}) = \mathbf{M} \cap R(\mathbf{P})$ [**Bor**, ch. IV, 11.23], on a l'égalité $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}) = \mathbf{M}$ [**Bor**, ch. V, 20.6].
– d'après ce qui précède, si $\mathbf{P}$ est un sous–groupe parabolique de $\mathbf{H}$ défini sur F, alors les composantes de Levi définies sur F de $\mathbf{P}$ sont les centralisateurs dans $\mathbf{H}$ des tores F–déployés maximaux de $R(\mathbf{P})$.

Convention. — On applique au groupe $H = \mathbf{H}(F)$ le langage des groupes algébriques de la manière habituelle suivante. On appelle :

– *tore de* H le groupe des points F–rationnels d'un tore de $\mathbf{H}$ défini sur F ;

– *tore déployé de* H le groupe des points F–rationnels d'un tore de $\mathbf{H}$ défini et déployé sur F ;
– *sous–groupe parabolique de* H le groupe des points F–rationnels $P = \mathbf{P}(F)$ d'un sous–groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{H}$ défini sur F, et *composante de Levi* de P le groupe des points F–rationnels d'une composante de Levi de $\mathbf{P}$ définie sur F ;
– *radical* (resp. *radical unipotent*) d'un sous–groupe parabolique $\mathbf{P}(F)$ de H le groupe $R(\mathbf{P})(F)$ (resp. le groupe $R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P})(F)$) — on le note $R(P)$ (resp. $R_{\mathrm{u}}(P)$.

Soit $P = \mathbf{P}(F)$ un sous–groupe parabolique de H. D'après les résultats rappelés plus haut, toute composante de Levi M de P est le centralisateur dans H d'un tore déployé maximal de $R(P)$, et l'on a la décomposition en produit semi–direct, appelée *décomposition de Levi de* P :

$$P = M \ltimes R_{\mathrm{u}}(P).$$

D'après [**Bor**, ch. V, 20.5], si M et M' sont deux composantes de Levi de P, alors il existe une unique $u \in R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P})(F)$ tel que $M' = uMu^{-1}$. De plus (loc. cit.), le morphisme quotient $\mathbf{H} \to \mathbf{H}/\mathbf{P}$ induit une application *surjective* $H \to (\mathbf{H}/\mathbf{P})(F)$, i.e. on a

$$(\mathbf{H}/\mathbf{P})(F) = H/P.$$

4.3. Points rationnels d'un H–espace tordu défini sur F. — Soit $\mathbf{H}^\natural$ un $\mathbf{H}$–espace tordu *défini sur* F, c'est–à–dire tel que :
– $\mathbf{H}^\natural$ est une variété définie sur F ;
– les actions à gauche et à droite de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}^\natural$ sont définies sur F.
On note $H^\natural = \mathbf{H}^\natural(F)$ l'ensemble des points F–rationnels de $\mathbf{H}^\natural$. On suppose que $H^\natural$ est *non vide*. Alors pour $\delta \in H^\natural$, le $\overline{F}$–automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$ de $\mathbf{H}$ est défini sur F, i.e. on a $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta) \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$. Munissons H et $H^\natural$ de la topologie de Zariski héritée de $\mathbf{H}$ et de $\mathbf{H}^\natural$. Alors $H^\natural$ est muni d'une structure de H–espace topologique tordu au sens de 2.4 : pour $\delta \in H^\natural$, on a $H^\natural = H \cdot \delta \subset \mathbf{H}^\natural$, et l'automorphisme $\mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)$ de H est donné par la restriction de $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$ à H. Notons que si $\mathbf{H}^\natural = \mathbf{H}\tau$ pour un $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$, alors $H^\natural$ coïncide avec le H–espace topologique tordu $H\tau$ défini en 2.4.

Puisque $\mathbf{H}^\natural$ est défini sur F, la fonction $\mathbf{H}^\natural \to \overline{F}$, $\delta \mapsto D_{\mathbf{H}^\natural}(\delta)$ appartient à l'algèbre affine $F[\mathbf{H}^\natural]$. Pour $\delta \in H^\natural$, on pose

$$D_{H^\natural}(\delta) = D_{\mathbf{H}^\natural}(\delta) \in F.$$

L'ensemble

$$\mathbf{H}^\natural \smallsetminus \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}} = \{\delta \in \mathbf{H}^\natural : D_{\mathbf{H}^\natural}(\delta) = 0\}$$

est F–fermé dans $\mathbf{H}^\natural$, par suite la variété $\mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$ est définie sur F. On note

$$H^\natural_{\mathrm{reg}} = \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}(F) \ (= H^\natural \cap \mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}})$$

l'ensemble de ses points F–rationnels. On a donc

$$H^\natural_{\mathrm{reg}} = \{\delta \in H^\natural : D_{H^\natural}(\delta) \neq 0\}.$$

Remarque. — Supposons le corps F infini. Puisque $\mathbf{H}$ est réductif connexe, H est dense dans $\mathbf{H}$ [**Bor**, ch. V, 18.3], et comme $H^\natural$ est supposé non vide, $H^\natural$ est dense dans $\mathbf{H}^\natural$. Comme $\mathbf{H}^\natural_{\mathrm{reg}}$ est ouvert et dense dans $\mathbf{H}^\natural$, on en déduit que $H^\natural_{\mathrm{reg}}$ est non vide. Par conséquent, $H^\natural_{\mathrm{reg}}$ est ouvert et dense dans $H^\natural$. ■

4.4. La décomposition $\mathrm{Aut}_{F'}(\mathbf{H}) = \mathrm{Int}_{F'}(\mathbf{H}) \rtimes \mathfrak{A}_\circ$**.** — Fixons un tore maximal $\mathbf{T}_\circ$ de $\mathbf{H}$ défini sur F, et un sous–groupe de Borel $\mathbf{B}_\circ$ de $\mathbf{H}$ contenant $\mathbf{T}_\circ$. Notons $\mathbf{B}_\circ^-$ le sous–groupe de Borel $\mathbf{B}_\circ^-$ de $\mathbf{H}$ opposé à $\mathbf{B}_\circ$ par rapport à $\mathbf{T}_\circ$. Choisissons une sous–extension galoisienne finie $F_\circ/F$ de F^{sep}/F déployant $\mathbf{T}_\circ$. Les groupes $\mathbf{B}_\circ$ et $\mathbf{B}_\circ^-$ sont donc tous les deux définis et déployés sur $F_\circ$. Comme en 3.5, posons $\Phi_\circ = \Phi(\mathbf{T}_\circ, \mathbf{H})$, $\Phi_\circ^+ = \Phi(\mathbf{T}_\circ, \mathbf{B}_\circ)$ et $\Delta_\circ = \Delta(\mathbf{T}_\circ, \mathbf{B}_\circ)$. Posons aussi $\Delta_\circ^- = \{-\alpha : \alpha \in \Delta_\circ\}$. Pour $\alpha \in \Phi_\circ$, le groupe $\mathbf{U}_\alpha$ est défini et déployé sur $F_\circ$. Pour chaque $\alpha \in \Delta_\circ$, choisissons un élément $u_\alpha \in \mathbf{U}_\alpha(F_\circ) \smallsetminus \{1\}$, et notons e_α l'épinglage de $\mathbf{U}_\alpha$ défini par u_α (cf. 3.5) ; puisque u_α est $F_\circ$–rationnel, le morphisme e_α est défini sur $F_\circ$. Rappelons qu'un *système de Chevalley (relativement à* $\mathbf{T}_\circ$*)* est la donnée d'une famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Phi_\circ}$ d'épinglages des $\mathbf{U}_\alpha$ vérifiant :

– pour $\alpha \in \Phi_\circ$, les épinglages f_α et $f_{-\alpha}$ sont associés, i.e. l'élément $f_\alpha(1)f_{-\alpha}(1)f_\alpha(1)$ appartient à $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_\circ)$;
– pour $\alpha, \beta \in \Phi_\circ$, il existe $\epsilon = \pm 1$ tel que
$$f_{r_\alpha(\beta)}(x) = m_\alpha f_\beta(\epsilon x) m_\alpha^{-1} \quad (x \in \overline{F}),$$
où $r_\alpha \in N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_\circ)/\mathbf{T}_\circ$ désigne la réflection associée à la racine α, et où on a noté m_α l'élément $f_\alpha(1)f_{-\alpha}(1)f_\alpha(1) \in N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_\circ)$.

On sait que la famille $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Delta_\circ}$ se prolonge en un $F_\circ$*–système de Chevalley* $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Phi_\circ}$, i.e. un système de Chevalley tel que les épinglages $e_\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbf{U}_\alpha$ ($\alpha \in \Phi_\circ$) sont définis sur $F_\circ$. De plus ce prolongement est unique « au signe près », c'est–à–dire au remplacement éventuel, pour certaines racines $\beta \in \Phi_\circ \smallsetminus (\Delta_\circ \cup \Delta_\circ^-)$, de e_β par $x \mapsto \bar{e}_\beta(x) = e_\beta(-x)$. Alors pour $\alpha \in \Phi_\circ$, les éléments $u_\alpha = e_\alpha(1) \in \mathbf{U}_\alpha$ et $m_\alpha = u_\alpha u_{-\alpha} u_\alpha \in N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_\circ)$ sont $F_\circ$–rationnels.

Posons
$$\mathfrak{A}_\circ = \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}, \mathbf{B}_\circ, \mathbf{T}_\circ, \{u_\alpha\}_{\alpha\in\Delta_\circ}),$$
et soit $\tau_\circ \in \mathfrak{A}_\circ$. Puisque $\tau_\circ(\mathbf{B}_\circ, \mathbf{T}_\circ) = (\mathbf{B}_\circ, \mathbf{T}_\circ)$, $\tau_\circ$ opère sur l'ensemble $\Phi_\circ$ en stabilisant $\Delta_\circ$: pour $\alpha \in \Phi_\circ$, la racine $\tau_\circ(\alpha) \in \Phi_\circ$ est donnée par $\mathbf{U}_{\tau_\circ(\alpha)} = \tau_\circ(\mathbf{U}_\alpha)$, et comme $\tau_\circ \circ e_\alpha = e_{\tau_\circ(\alpha)}$ ($\alpha \in \Delta_\circ$), l'unicité du $F_\circ$–système de Chevalley prolongeant $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Delta_\circ}$ implique que pour $\beta \in \Phi_\circ \smallsetminus (\Delta_\circ \cup \Delta_\circ^-)$, on a $\tau_\circ \circ e_\beta = e_{\tau_\circ(\beta)}$ ou bien $\tau_\circ \circ e_\beta = \bar{e}_{\tau_\circ(\beta)}$. Par conséquent pour $\alpha \in \Phi_\circ$, l'isomorphisme de groupes algébriques $\tau_\circ : \mathbf{U}_\alpha \to \mathbf{U}_{\tau_\circ(\alpha)}$ est défini sur $F_\circ$. D'autre part puisque le tore $\mathbf{T}_\circ$ est défini et déployé sur $F_\circ$, la restriction de $\tau_\circ$ à $\mathbf{T}_\circ$ est définie sur $F_\circ$. Ordonnons (de manière arbitraire) l'ensemble $\Phi_\circ^+$, i.e. posons $\Phi_\circ^+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Posons $\mathbf{U}_\circ = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B}_\circ)$ et $\mathbf{U}_\circ^- = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B}_\circ^-)$. D'après [**Bor**, ch. IV, 14.4], l'application produit $\prod_{i=1}^n \mathbf{U}_{\alpha_i} \to \mathbf{U}_\circ$ est un $F_\circ$–isomorphisme de variétés algébriques ; de la même manière, l'application produit $\prod_{i=1}^n \mathbf{U}_{-\alpha_i} \to \mathbf{U}_\circ^-$ est un $F_\circ$–isomorphisme de variétés algébriques. D'après [**Bor**, ch. IV, 14.14], l'application produit $\mathbf{U}_\circ^- \times \mathbf{T}_\circ \times \mathbf{U}_\circ \to \mathbf{H}$ est un $F_\circ$–isomorphisme de variétés algébriques sur un ouvert $\mathbf{V}_\circ$ de $\mathbf{H}$ défini sur $F_\circ$. D'après ce qui précède, on a $\tau_\circ(\mathbf{V}_\circ) = \mathbf{V}_\circ$ et la restriction de $\tau_\circ$ à $\mathbf{V}_\circ$ est définie sur $F_\circ$. Par conséquent $\tau_\circ$ est défini sur $F_\circ$. On a donc montré l'inclusion

$$(*) \qquad \mathfrak{A}_\circ \subset \mathrm{Aut}_{F_\circ}(\mathbf{H}).$$

Cette inclusion jointe à la relation $(**)$ de 3.5, entraînent que pour toute sous–extension $F'/F_\circ$ de $\overline{F}/F_\circ$, on a la décomposition en produit semidirect

$$(**) \qquad \mathrm{Aut}_{F'}(\mathbf{H}) = \mathrm{Int}_{F'}(\mathbf{H}) \rtimes \mathfrak{A}_\circ.$$

Remarques. — Soit $\pi : \mathbf{H}_{\mathrm{SC}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ le revêtement universel de $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ (cf. 3.6).

(1) D'après [**T**, 2.6.1], le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ est défini sur F et déployé sur $F_\circ$, et le morphisme π est défini sur F. Les paires de Borel $(\mathbf{B}'_\circ, \mathbf{T}'_\circ)$ de $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ et $(\mathbf{B}_{\circ,\mathrm{sc}}, \mathbf{T}_{\circ,\mathrm{sc}})$ de $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ définies comme en 3.5 en remplaçant $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ par $(\mathbf{B}_\circ, \mathbf{T}_\circ)$, sont définies et déployées sur $F_\circ$. Pour $\alpha \in \Delta_\circ$, l'élément $\tilde{u}_\alpha = \pi^{-1}(u_\alpha)$ est $F_\circ$–rationnel. À partir de $\mathfrak{A}_\circ$, on définit

comme en 3.6 les sous–ensemble $\widetilde{\mathfrak{A}}_\circ \subset \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}})$ et $\mathfrak{A}'_\circ \subset \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$. D'après $(*)$, on a les inclusions

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\circ \subset \mathrm{Aut}_{F_\circ}(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}), \quad \mathfrak{A}'_\circ \subset \mathrm{Aut}_{F_\circ}(\mathbf{H}_{\mathrm{der}}).$$

D'autre part le morphisme bijectif

$$\overline{\pi} : \mathbf{H}_{\mathrm{SC}}/Z(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}) \to \mathbf{H}_{\mathrm{der}}/Z(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$$

est défini sur F, mais n'est en général pas un isomorphisme (cf. l'exemple de 3.6). On en déduit que si $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$, le relèvement $\tilde{\tau}$ de τ à $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ n'est pas nécessairement défini sur F (même si $F = F_\circ$).

(2) D'après [**T**, 3.1.2], $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ se décompose en un produit direct

$$\mathbf{H}_{\mathrm{SC}} = \mathbf{H}_{\mathrm{SC},1} \times \cdots \times \mathbf{H}_{\mathrm{SC},n},$$

où chaque $\mathbf{H}_{\mathrm{SC},i}$ est un groupe semisimple simplement connexe défini sur F et presque F–simple ; de plus cette décomposition est unique à permutation des $\mathbf{H}_{\mathrm{SC},i}$ près. L'unicité de la décomposition implique que si $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}})$, alors τ permute les facteurs $\mathbf{H}_{\mathrm{SC},i}$. Supposons $\mathbf{H}$ presque F–simple, i.e. supposons $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}} = \mathbf{H}_{\mathrm{SC},1}$. Alors d'après loc. cit., il existe une sous–extension finie L/F de F^{sep}/F telle que $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ est F–isomorphe à $\mathrm{Res}_{L/F}(\mathbf{H}^*)$ pour un groupe semisimple simplement connexe $\mathbf{H}^*$ défini sur L et (absolument) presque simple. Ici, $\mathrm{Res}_{L/F}$ désigne le foncteur *restriction des scalaires* de la catégorie des groupes algébriques affines définis sur L dans celle des groupes algébriques affines définis sur F. Le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{SC}}$ se décompose donc, *sur* L, en un produit direct

$$\mathbf{H}_{\mathrm{SC}} = \mathbf{H}_1^* \times \cdots \times \mathbf{H}_m^*,$$

où chaque groupe $\mathbf{H}_i^*$ est L–isomorphe à $\mathbf{H}^*$, et $m = [L : F]$; comme plus haut, cette décomposition est unique à permutation des $\mathbf{H}_i^*$ près, et si $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}_{\mathrm{SC}})$, alors τ permute les facteurs $\mathbf{H}_i^*$. ■

4.5. Automorphismes stabilisant un sous–groupe de Borel défini sur F^{sep}. — On s'intéresse dans ce n° à la version F^{sep}–rationnelle du théorème 1 de 3.7 : pour un F–automorphisme τ de $\mathbf{H}$, on aimerait savoir s'il existe un sous–groupe de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$ qui soit défini sur une sous–extension de F^{sep}/F (i.e. sur F^{sep}). Si $p > 1$, la réponse est négative en général :

Exemple. — Soit F le corps de séries formelles $\mathbb{F}_2((\varpi))$, $\mathbf{H}$ le groupe $\mathbb{GL}_2$, et $x \in \mathbf{H}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}$. Prenons pour τ le F–automorphisme intérieur $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x)$. Un sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}$ est τ–stable si et seulement s'il contient x, or aucun sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}$ défini sur F^{sep} ne contient x. ■

Pour traiter la question qui nous intéresse, on peut bien sûr supposer $F = F^{\mathrm{sep}}$.

Lemme. — *On suppose $F = F^{\mathrm{sep}}$. Soit un élément $h \in H$ dont la décomposition de Jordan $h = h_{\mathrm{s}}h_{\mathrm{u}}$ est F–rationnelle, i.e. tel que h_{s} et h_{u} appartiennent à H. Alors il existe un sous–groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{H}$ défini sur F, tel que $h \in \mathbf{B}(F)$.*

Démonstration. — Supposons tout d'abord h unipotent, i.e. $h = h_{\mathrm{u}} \in H$. Via le choix d'un F–plongement $\iota : \mathbf{H} \to \mathbb{GL}_n$, identifions $\mathbf{H}$ à un sous–groupe fermé de $\mathbb{GL}_n$ défini sur F. D'après [**Bor**, ch. I, theo. 4.8], il existe un élément $x \in \mathbb{GL}_n(F)$ tel que xhx^{-1} appartient au sous–groupe $\mathbb{U}_n$ de $\mathbb{GL}_n$ formé des matrices strictement triangulaires supérieures. Notons $\mathbb{B}_n$ le sous–groupe fermé de $\mathbb{GL}_n$ formé des matrices triangulaires supérieures, et posons

$\mathbb{B}_n^x = x^{-1}\mathbb{B}_n x$. Alors $\mathbb{B}_n^x$ est un sous–groupe de Borel de $\mathbb{GL}_n$ défini sur F, $\mathbf{H}\cap\mathbb{B}_n^x$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}$ défini sur F, et h appartient au groupe $(\mathbf{H}\cap\mathbb{B}_n^x)(F)$ des points F–rationnels de $\mathbf{H}\cap\mathbb{B}_n^x$. D'après [**Bor**, ch. IV, 11.14], la composante neutre $\mathbf{B}=(\mathbf{H}\cap\mathbb{B}_n^x)^\circ$ de $\mathbf{H}\cap\mathbb{B}_n^x$ est un sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}$, et comme $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{B})=\mathbf{B}$ [**Bor**, ch. IV, 11.16], on a $\mathbf{B}=\mathbf{H}\cap\mathbb{B}_n^x$.

Passons au cas général. Soit $\mathbf{M}=Z_{\mathbf{H}}(h_{\mathrm{s}})^\circ$; c'est un groupe réductif connexe défini sur F, et h_{s} et h_{u} appartiennent à $\mathbf{M}$. D'après le paragraphe précédent, il existe un sous–groupe de Borel $\mathbf{B}_{\mathbf{M}}$ de $\mathbf{M}$ défini sur F, tel que $h_{\mathrm{u}}\in\mathbf{B}_{\mathbf{M}}$. Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal de $\mathbf{B}_{\mathbf{M}}$ défini sur F. Comme $h_{\mathrm{s}}\in Z(\mathbf{M})\subset\mathbf{T}$, h appartient à $\mathbf{B}_{\mathbf{M}}(F)$. D'après [**Bor**, ch. IV, 11.14], il existe un sous–groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{H}$ tel que $\mathbf{B}_{\mathbf{M}}=(\mathbf{B}\cap\mathbf{M})^\circ$. Comme $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{H}$ défini (donc déployé) sur F — rappelons que $F=F^{\mathrm{sep}}$ —, le groupe $\mathbf{B}$ est lui aussi défini et déployé sur F. D'où le lemme. □

Proposition. — *On suppose $F=F^{\mathrm{sep}}$. Soit $\tau\in\mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ tel que la décomposition de Jordan $\tau_{\mathrm{der}}=(\tau_{\mathrm{der}})_{\mathrm{s}}\circ(\tau_{\mathrm{der}})_{\mathrm{u}}$ de $\tau_{\mathrm{der}}\in\mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$ est définie sur F, i.e. tel que $(\tau_{\mathrm{der}})_{\mathrm{s}}$ et $(\tau_{\mathrm{der}})_{\mathrm{u}}$ appartiennent à $\mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})$. Alors il existe un sous–groupe de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$ défini sur F.*

Démonstration. — D'après [**Bor**, ch. IV, 11.14], l'application $\mathbf{B}\mapsto\mathbf{B}\cap\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ est une bijection de l'ensemble des sous–groupes de Borel de $\mathbf{H}$ sur l'ensemble des sous–groupes de Borel de $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$, et $\mathbf{B}$ est τ–stable (resp. défini sur F) si et seulement si $\mathbf{B}\cap\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ est τ–stable (resp. défini sur F). On peut donc supposer $\mathbf{H}=\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$. Alors $\tau=\tau_{\mathrm{der}}$ induit par passage au quotient un F–automorphisme $\overline{\tau}$ de $\overline{\mathbf{H}}=\mathbf{H}/Z(\mathbf{H})$ dont la décomposition de Jordan $\overline{\tau}=\overline{\tau}_{\mathrm{s}}\circ\overline{\tau}_{\mathrm{u}}$ est définie sur F. D'après loc. cit., notant ϕ le morphisme quotient $\mathbf{H}\rightarrow\overline{\mathbf{H}}$, l'application $\mathbf{B}\mapsto\phi(\mathbf{B})$ est une bijection de l'ensemble des sous–groupes de Borel de $\mathbf{H}$ sur l'ensemble des sous–groupes de Borel de $\overline{\mathbf{H}}$; et $\mathbf{B}$ est τ–stable (resp. défini sur F) si et seulement si $\phi(\mathbf{B})$ est $\overline{\tau}$–stable (resp. défini sur F). On peut donc suppposer $Z(\mathbf{H})=\{1\}$.

Choisissons comme en 3.4 un morphisme de groupe algébrique

$$\iota:\mathbf{H}\rightarrow\mathbb{GL}_n$$

qui soit un isomorphisme sur un sous–groupe fermé de $\mathbb{GL}_n$, et un élément $g\in\mathbb{GL}_n$, tels que pour tout $h\in\mathbf{H}$ on ait $\iota\circ\tau=\mathrm{Int}_{\mathbb{GL}_n}(g)\circ\iota$. Puisque $\mathbf{H}$ est défini sur F, on peut choisir ι défini sur F, et identifier $\mathbf{H}$ au sous–groupe (fermé, défini sur F) $\iota(\mathbf{H})$ de $\mathbb{GL}_n$. Notons $\mathbb{H}$ le groupe quotient $N_{\mathbb{GL}_n}(\mathbf{H})/Z_{\mathbb{GL}_n}(\mathbf{H})$, et $\pi:N_{\mathbb{GL}_n}(\mathbf{H})\rightarrow\mathbb{H}$ le morphisme quotient ; il est défini sur F, et induit par restriction un morphisme (de groupes algébriques) $\mathbf{H}\rightarrow\mathbb{H}$ qui est un isomorphisme sur un sous–groupe fermé de $\mathbb{H}$ défini sur F. On identifie $\mathbf{H}$ à ce sous–groupe. Puisque l'automorphisme τ est défini sur F, la projection $\bar{g}=\pi(g)\in\mathbb{H}$ est F–rationnelle. Écrivons les décompositions de Jordan $g=g_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{u}}$ de g et $\bar{g}=\bar{g}_{\mathrm{s}}\bar{g}_{\mathrm{u}}$ de g et de $\bar{g}$. Alors $\tau_{\mathrm{s}}=\mathrm{Int}_{\mathbb{GL}_n}(g_{\mathrm{s}})|_{\mathbf{H}}$, $\tau_{\mathrm{u}}=\mathrm{Int}_{\mathbb{GL}_n}(g_{\mathrm{u}})|_{\mathbf{H}}$, $\bar{g}_{\mathrm{s}}=\pi(g_{\mathrm{s}})$ et $\bar{g}_{\mathrm{u}}=\pi(g_{\mathrm{u}})$, et puisque par hypothèse τ_{s} et τ_{u} sont définis sur F, $\bar{g}_{\mathrm{s}}$ et $\bar{g}_{\mathrm{u}}$ appartiennent à $\mathbb{H}(F)$. On peut donc appliquer le lemme : il existe un sous–groupe de Borel $\mathbb{B}$ de $\mathbb{H}$ défini sur F, tel que $\bar{g}\in\mathbb{B}(F)$. À nouveau d'après [**Bor**, ch. IV, 11.14], $B=\mathbb{B}\cap\mathbf{H}$ est un sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}$, et il est défini sur F. Comme

$$\tau(B)=\bar{g}(\mathbb{B}\cap\mathbf{H})\bar{g}^{-1}=\bar{g}\mathbb{B}\bar{g}^{-1}\cap\mathbf{H}=B,$$

la proposition est démontrée. □

4.6. Automorphismes stabilisant une paire de Borel définie sur F^{sep}. — On prouve dans ce n° qu'un F–automorphisme quasi–semisimple τ de $\mathbf{H}$ stabilise une paire de Borel de $\mathbf{H}$ définie sur F^{sep} — précisément, on prouve qu'il existe un tore maximal τ–admissible de $\mathbf{H}$ défini sur F —, et que le groupe $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F.

Pour $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$, on note $\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}$ le sous–groupe F–fermé de $\mathbf{H}_\tau$ formé des composantes connexes qui possèdent un point F^{sep}–rationnel, i.e. on pose

$$\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}} = (\mathbf{H}_\tau \cap \mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}}))\mathbf{H}_\tau^\circ.$$

On a

$$(\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}})^\circ = \mathbf{H}_\tau^\circ.$$

Par conséquent si $\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}$ est défini sur F, alors $\mathbf{H}_\tau^\circ$ l'est aussi. Réciproquement si $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F, alors $\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}$ est défini sur F^{sep}, donc sur F puisqu'il est F–fermé dans $\mathbf{H}$.

Remarques. — (1) Pour $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$, le groupe $\mathbf{H}_\tau$ est F–fermé dans $\mathbf{H}$ donc défini sur $F^{p^{-\infty}}$. En particulier si $p = 1$, alors $\mathbf{H}_\tau$ est défini sur F, donc $\mathbf{H}_\tau^\circ$ l'est aussi.

(2) Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ tel que $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F. D'après [**Bor**, ch. AG, 12.3 et 13.3] on a $\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}} = \mathbf{H}_\tau$ si et seulement si $\mathbf{H}_\tau$ est défini sur F^{sep}, i.e. sur F puisque $\mathbf{H}_\tau$ est F–fermé dans $\mathbf{H}$. D'autre part pour toute sous–extension F'/F de F^{sep}/F, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_\tau \cap \mathbf{H}(F') &= (\mathbf{H}_\tau \cap \mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}}))^{\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F')}\\ &= \mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}(F^{\mathrm{sep}})^{\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F')}\\ &= \mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}(F').\end{aligned}$$

(3) On suppose $F = F^{\mathrm{sep}}$. Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ quasi–semisimple tel que $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F. Choisissons un tore maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ défini sur F. Les groupes $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ et $\mathbf{N} = N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})$ sont τ–stables et définis sur F. Soit $\mathbf{B}^\sharp$ un sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ contenant $\mathbf{S}$, et soit $h \in \mathbf{H}_\tau$. Alors $h(\mathbf{B}^\sharp, \mathbf{S})h^{-1} = x(\mathbf{B}^\sharp, \mathbf{S})x^{-1}$ pour un $x \in \mathbf{H}_\tau^\circ$, et $x^{-1}h \in N_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}) \subset \mathbf{N}$. On a donc

$$\mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}_\tau^\circ \mathbf{N}_\tau = \mathbf{N}_\tau \mathbf{H}_\tau^\circ.$$

Posant $\mathbf{N}_\tau^{\mathrm{sep}} = \mathbf{N} \cap \mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}$, on a aussi

$$\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}} = \mathbf{H}_\tau^\circ \mathbf{N}_\tau^{\mathrm{sep}} = \mathbf{N}_\tau^{\mathrm{sep}} \mathbf{H}_\tau^\circ.$$

Puisque $\mathbf{T}$ est défini et déployé sur F, $\mathbf{T}_\tau$ l'est aussi, et $\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_\tau(F)\mathbf{T}_\tau^\circ$. Par conséquent $\mathbf{T}_\tau \mathbf{H}_\tau^\circ = \mathbf{T}_\tau(F)\mathbf{H}_\tau^\circ$ est un sous–groupe fermé de $\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}$, défini sur F, et $\mathbf{T}_\tau$ est contenu dans $\mathbf{N}_\tau^{\mathrm{sep}}$. Puisque $\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}$ est défini sur F, $\mathbf{N}_\tau^{\mathrm{sep}}$ l'est aussi, et $\mathbf{H}_\tau$ est défini sur F si et seulement si $\mathbf{N}_\tau^{\mathrm{sep}} = \mathbf{N}_\tau$.

(4) On suppose $\mathbf{H}$ semisimple et simplement connexe. Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ quasi–semisimple. Le morphisme $1 - \tau : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ est séparable (corollaire de 3.7), par suite $\mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F. ■

Lemme. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ quasi–semisimple. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes* [11] *:*

- *le groupe $\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{sep}}$ est défini sur F ;*
- *le groupe $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F ;*
- *il existe un tore maximal τ–admissible de $\mathbf{H}$ défini sur F.*

Démonstration. — L'équivalence des deux premières conditions a été démontrée plus haut. Si $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F, alors il existe un tore maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ défini sur F, et $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ est un tore maximal τ–admissible de $\mathbf{H}$ défini sur F.

Supposons qu'il existe un tore maximal τ–admissible $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$ défini sur F, et montrons que le groupe $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F. Comme $\mathbf{H}_\tau$ est F–fermé dans $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_\tau^\circ$ l'est aussi et il suffit

11. On verra plus loin (théorème) qu'elles sont vérifiées.

de montrer que $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F^{sep}. On peut donc supposer $F = F^{\mathrm{sep}}$. Soit $\mathbf{B}$ un sous–groupe de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$ contenant $\mathbf{T}$. Alors $(\mathbf{B}^\sharp, \mathbf{T}^\sharp) = (\mathbf{B}\cap \mathbf{H}_\tau^\circ, \mathbf{T}\cap\mathbf{H}_\tau^\circ)$ est une paire de Borel de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ définie sur F (puisque $\mathbf{T}$ est défini et déployé sur F, $\mathbf{T}^\sharp$ l'est aussi). Notons $\mathbf{B}'$ le sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}$ opposé à $\mathbf{B}$ par rapport à $\mathbf{T}$. Alors $\mathbf{B}'^\sharp = \mathbf{B}'\cap\mathbf{H}_\tau^\circ$ est le sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ opposé à $\mathbf{B}^\sharp$ par rapport à $\mathbf{T}^\sharp$, et tout comme $\mathbf{B}^\sharp$, $\mathbf{B}'^\sharp$ est défini sur F. Le groupe $\mathbf{U}'^\sharp = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B}'^\sharp)$ est défini sur F, et l'application produit $\mathbf{U}'^\sharp \times \mathbf{B}^\sharp \to \mathbf{H}_\tau^\circ$ est un isomophisme de variétés algébriques sur un ouvert de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ [**Bor**, ch. IV, 14.14]. Cet ouvert est défini sur F et engendre $\mathbf{H}_\tau^\circ$, par conséquent $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F. □

On peut maintenant démontrer le résultat principal de ce n° :

Théorème. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ quasi–semisimple. Le groupe $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F, et il existe un tore maximal τ–admissible de $\mathbf{H}$ défini sur F. En particulier, il existe une paire de Borel τ–stable de $\mathbf{H}$ définie sur F^{sep}.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathbf{H}_\tau^\circ$ est défini sur F^{sep}. On peut supposer $p > 1$ et $F = F^{\mathrm{sep}}$. La démonstration s'organise comme suit : on commence par se ramener au cas où τ est localement fini. Puis par descente de $\mathbf{H}$ à $\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^\circ$, on se ramène au cas où τ est (quasi–semisimple) unipotent, ce qui permet d'utiliser le lemme de 3.9.

D'après le lemme de 3.5, on a $\mathbf{H}_\tau^\circ = R(\mathbf{H})_\tau^\circ (\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau_{\mathrm{der}}}^\circ$. Puisque $R(\mathbf{H})$ est un tore défini sur F ($= F^{\mathrm{sep}}$), il est déployé sur F [**Bor**, ch. III, 8.11], et $R(\mathbf{H})_\tau^\circ$ est lui aussi un tore défini et déployé sur F [**Bor**, ch. III, 8.4]. Par conséquent si $(\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_\tau^\circ$ est défini sur F, alors $\mathbf{H}_\tau^\circ$ l'est aussi (c'est l'image du morphisme produit $R(\mathbf{H})_\tau^\circ \times (\mathbf{H}_{\mathrm{der}})_{\tau_{\mathrm{der}}}^\circ \to \mathbf{H}$). Quitte à remplacer $\mathbf{H}$ par $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ et τ par τ_{der}, on peut donc supposer $\tau \in \mathrm{Aut}_F^0(\mathbf{H})$. Alors on écrit la décomposition de Jordan $\tau = \tau_{\mathrm{s}} \circ \tau_{\mathrm{u}}$. Rappelons que τ_{s} et τ_{u} appartiennent à $\mathrm{Aut}_{F^{p^{-\infty}}}(\mathbf{H})$.

Montrons que le groupe $\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^\circ$ est défini sur F. Identifions $\mathbf{H}$ à la composante neutre du groupe algébrique affine $\mathbf{H}' = \mathbf{H} \rtimes \langle\tau\rangle/\mathbf{C}$ comme en 3.4, et notons δ l'image de $1 \rtimes \tau$ dans $\mathbf{H}'$. Puisque $\mathbf{H}$ et τ sont définis sur F, $\mathbf{H}'$ l'est aussi et δ appartient à $\mathbf{H}'(F)$. Écrivons la décomposition de Jordan $\delta = \delta_{\mathrm{s}}\delta_{\mathrm{u}}$. On a $\delta_{\mathrm{s}} \in \mathbf{H}(F^{p^{-\infty}})$, $\tau_{\mathrm{s}} = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}'}(\delta_{\mathrm{s}})^\circ$ et $\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^\circ = (\mathbf{H}'_{\delta_{\mathrm{s}}})^\circ$. Puisque $\mathbf{H}'$ est affine et défini sur F, il existe un morphisme de groupes algébriques

$$\iota : \mathbf{H}' \to \mathbb{GL}_n$$

défini sur F, qui soit un isomorphisme sur un sous–groupe fermé de de $\mathbb{GL}_n$. Identifions $\mathbf{H}'$ à $\iota(\mathbf{H}')$. Notons $\mathbb{T}$ le tore maximal diagonal de $\mathbb{GL}_n$. Il existe un $g \in \mathrm{GL}_n(\overline{F})$ tel que

$$g^{-1}\delta_{\mathrm{s}} g = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_1; x_2, \ldots, x_2; \ldots; x_k, \ldots, x_k) \in \mathbb{T}$$

pour des $x_i \in \overline{F}^\times$ deux–à–deux distincts. Posons $y = g^{-1}\delta_{\mathrm{s}} g$. On a

$$(\mathbb{GL}_n)_y = \mathbb{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{GL}_{n_k}, \quad n_1 + \cdots + n_k = n,$$

où n_i est la multiplicité de la valeur propre x_i. Pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, puisque $p > 1$, l'application

$$\overline{F}^\times \to \overline{F}^\times,\ x \mapsto x^{p^m}$$

est bijective, et on a l'égalité $(\mathbb{GL}_n)_{y^{p^m}} = (\mathbb{GL}_n)_y$; par suite $(\mathbb{GL}_n)_{\delta_{\mathrm{s}}^{p^m}} = (\mathbb{GL}_n)_{\delta_{\mathrm{s}}}$, d'où

$$\mathbf{H}'_{\delta_{\mathrm{s}}^{p^m}} = \mathbf{H}' \cap (\mathbb{GL}_n)_{\delta_{\mathrm{s}}^{p^m}} = \mathbf{H}' \cap (\mathbb{GL}_n)_{\delta_s} = \mathbf{H}'_{\delta_s}.$$

Choisissons un entier $m \geq 1$ tel que $(\tau_{\mathrm{u}})^{p^m} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, et posons $\sigma = \tau^{p^m} = (\tau_{\mathrm{s}})^{p^m}$. Puisque σ est semisimple et défini sur F, $\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^\circ = \mathbf{H}_\sigma^\circ$ est défini sur F.

Comme τ est défini sur F, τ^* $(= \tau|_{\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^\circ})$ l'est aussi. Or d'après la proposition et le corollaire de 3.9, τ^* est quasi–semisimple et unipotent, et $\mathbf{H}_\tau^\circ = (\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^\circ)_{\tau^*}$. Quitte à remplacer $\mathbf{H}$ par $\mathbf{H}_{\tau_{\mathrm{s}}}^\circ$ et τ par τ^*, on peut donc supposer τ unipotent. D'après la proposition de 4.5, τ stabilise un sous–groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{H}$ défini sur F. Puisque $\mathbf{B}_\circ$ (cf. 4.4) et $\mathbf{B}$ sont définis sur F, il existe un $y \in \mathbf{H}(F)$ tel que $\mathbf{B} = y^{-1}\mathbf{B}_\circ y$. Quitte à remplacer τ par $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(y) \circ \tau \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(y^{-1})$, on peut supposer $\tau(\mathbf{B}_\circ) = \mathbf{B}_\circ$. Écrivons $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h) \circ \tau_\circ$ avec $h \in \mathbf{H}$ et $\tau_\circ \in \mathfrak{A}_\circ$ (relation $(**)$ de 3.5). Soit un entier $m \geq 1$ tel que $\tau^{p^m} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$. Puisque

$$\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(h\tau_\circ(h)\cdots\tau_\circ^{p^m-1}(h)) \circ \tau_\circ^{p^m} = \tau^{p^m} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}},$$

d'après la relation $(**)$ de 4.4, on a $h\tau_\circ(h)\cdots\tau_\circ^{p^m-1}(h) \in Z(\mathbf{H})$ et $\tau_\circ^{p^m} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$. Donc $\tau_\circ$ est unipotent, et d'après le lemme de 3.9, il existe un $x \in \mathbf{H}$ tel que

$$\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x^{-1}) \circ \tau_\circ \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x) = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(x^{-1}\tau_\circ(x)) \circ \tau_\circ.$$

Comme $\tau \circ \tau_\circ^{-1}(\mathbf{B}_\circ) = \mathbf{B}_\circ$, $x^{-1}\tau_\circ(x)$ appartient à $\mathbf{B}_\circ$.

Puisque $\mathbf{V}_\circ$ $(= \mathbf{U}_\circ^-\mathbf{B}_\circ)$ est ouvert dans $\mathbf{H}$ et que $\mathbf{H}(F)$ est dense dans $\mathbf{H}$, quitte à remplacer τ par $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(y') \circ \tau \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(y'^{-1})$ pour un $y' \in \mathbf{H}(F)$, on peut supposer $x \in \mathbf{V}_\circ$. Écrivons $x = \bar{u}b$ avec $\bar{u} \in \mathbf{U}_\circ^-$ et $b \in \mathbf{B}_\circ$. Comme $x^{-1}\tau_\circ(x) = b^{-1}\bar{u}^{-1}\tau_\circ(\bar{u})\tau_\circ(b) \in \mathbf{B}_\circ$, on a $\bar{u}^{-1}\tau_\circ(\bar{u}) \in \mathbf{B}_\circ$; or $\mathbf{U}_\circ^- \cap \mathbf{B}_\circ = \{1\}$, donc $\bar{u} \in \mathbf{U}_\circ^- \cap \mathbf{H}_{\tau_\circ}$. On obtient

$$\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(b^{-1}\tau_\circ(b)) \circ \tau_\circ = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(b^{-1}) \circ \tau_\circ \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(b).$$

Puisque τ et $\tau_\circ$ sont définis sur F, l'image $\bar{b}_1$ de $b_1 = b^{-1}\tau_\circ(b)$ dans $\mathbf{B}_\circ/Z(\mathbf{H})$ est F–rationnelle. Écrivons $b = tu$, $t \in \mathbf{T}_\circ$, $u \in \mathbf{U}_\circ$, et posons $t_1 = t^{-1}\tau_\circ(t)$ et $\tau'_\circ = \mathrm{Int}_H(t_1) \circ \tau_\circ$. On a

$$b_1 = u^{-1}t^{-1}\tau_\circ(t)\tau_\circ(u) = u^{-1}\tau'_\circ(u)t_1$$

où $u^{-1}\tau'_\circ(u) \in \mathbf{U}_\circ$ et $t_1 \in \mathbf{T}_\circ$. Comme $\bar{b}_1$ est F–rationnel, $u^{-1}\tau'_\circ(u)$ et l'image de t_1 dans $\mathbf{T}/Z(\mathbf{G})$ le sont aussi. En particulier, $\tau'_\circ$ est défini sur F et stabilise la paire de Borel $(\mathbf{B}_\circ, \mathbf{T}_\circ)$ de $\mathbf{H}$. D'après la proposition de 3.7, le morphisme $(1 - \tau'_\circ)|_{\mathbf{U}_\circ}$ est séparable. D'autre part le groupe $(\mathbf{U}_\circ)_{\tau'_\circ}$ est connexe (théorème de 3.7), résoluble (car nilpotent), et déployé sur F $(= F^{\mathrm{sep}})$. Comme $\tau'_\circ(u^{-1})u \in \mathbf{U}_\circ(F)$, cela implique [**Bor**, ch. V, 15.12] qu'il existe un élément $u' \in \mathbf{U}_\circ(F)$ tel que $\tau'_\circ(u^{-1})u = \tau'_\circ(u'^{-1})u'$. Donc $u^{-1}\tau_\circ(u) = u'^{-1}\tau_\circ(u')$ et

$$\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u^{-1}\tau'_\circ(u)t_1) \circ \tau_\circ = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u'^{-1}\tau'_\circ(u'))) \circ \tau'_\circ = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u'^{-1}) \circ \tau'_\circ \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(u').$$

Le tore maximal $u'^{-1}\mathbf{T}_\circ u'$ de $\mathbf{H}$ est défini sur F et τ–admissible. Puisque ce tore est déployé sur F, tout sous–groupe de Borel de $\mathbf{H}$ le contenant est défini et déployé sur F, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Corollaire. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ quasi–central. Le groupe $\mathbf{H}_\tau$ est défini sur F.*

Démonstration. — On peut supposer $F = F^{\mathrm{sep}}$. Choisissons un tore maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{H}_\tau^\circ$ défini sur F, et posons $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$, $\mathbf{N} = N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})$ et $\mathbf{W} = \mathbf{N}/\mathbf{T}$. Les groupes $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{W}$ sont définis sur F, et d'après la remarque (3), on a l'égalité $\mathbf{H}_\tau = \mathbf{N}_\tau\mathbf{H}_\tau^\circ$. Puisque τ est quasi–central, tout élément τ–stable de $\mathbf{W}$ se relève en un élément de $\mathbf{N} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ$ (remarque (1) de 3.8). On a donc $\mathbf{N}_\tau = (\mathbf{N} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ)\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_\tau(\mathbf{N} \cap \mathbf{H}_\tau^\circ)$. Par conséquent $\mathbf{H}_\tau = \mathbf{T}_\tau\mathbf{H}_\tau^\circ = \mathbf{T}_\tau(F)\mathbf{H}_\tau^\circ$, d'où le résultat. □

Remarque. — Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ quasi–semisimple. On peut préciser la remarque (3), dont on reprend les hypothèses et les notations (en particulier $F = F^{\mathrm{sep}}$, et $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{H})$ est quasi–semisimple).

(5) Posons $\mathbf{W} = \mathbf{N}/\mathbf{T}$, et notons $\mathbf{W}_\tau$ le sous–groupe de $\mathbf{W}$ formé des éléments qui sont τ–stables. La projection canonique $\mathbf{N} \to \mathbf{W}$ induit un morphisme injectif de groupes (et même de groupes algébriques) $\mathbf{N}_\tau/\mathbf{T}_\tau \to \mathbf{W}_\tau$. On note $\mathbf{W}_\tau^* \subset \mathbf{W}_\tau$ son image.

Puisque $\mathbf{T}$ est défini et déployé sur F, pour chaque τ–orbite $\mathcal{O}$ dans $\Phi(\mathbf{T}, \mathbf{H})$, l'élément $y_{\tau,\mathcal{O}}$ défini dans la remarque 4 de 3.7, appartient à F. On en déduit (remarque

(3) de 3.8) qu'il existe un élément $t \in \mathbf{T}(F)$ tel que le F–automorphisme $\tau' = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(t)\circ\tau$ de $\mathbf{H}$ est quasi–central. Le tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$ est τ'-admissible, et l'on a $\mathbf{W}_{\tau'} = \mathbf{W}_\tau$ et $\mathbf{T}_{\tau'} = \mathbf{T}_\tau$. Puisque τ' est défini sur F, $\mathbf{H}_{\tau'}$ l'est aussi (corollaire), et $\mathbf{N}_{\tau'} = \mathbf{N}\cap\mathbf{N}_{\tau'}$ est défini sur F. Notons que d'après la remarque (1) de 3.8, on a l'égalité $\mathbf{W}^*_{\tau'} = \mathbf{W}_{\tau'}$.

Soit maintenant un élément $n \in \mathbf{N}_\tau$. Alors $w = n\mathbf{T}$ appartient à $\mathbf{W}^*_\tau \subset \mathbf{W}_\tau = \mathbf{W}^*_{\tau'}$, donc se relève en un élément $n' \in \mathbf{N}_{\tau'}$, que l'on peut choisir dans $\mathbf{N}_{\tau'}(F)$ puisque $\mathbf{N}_{\tau'} = \mathbf{N}_{\tau'}(F)\mathbf{T}^\circ_\tau$. Soit $x = nn'^{-1} \in \mathbf{T}$. Posant $t^{w-1} = ntn^{-1}t^{-1} = n'tn'^{-1}t^{-1}$, on a $t^{w-1} = x\tau(x)^{-1} \in \mathbf{T}(1-\tau)$. Réciproquement si $w \in \mathbf{W}_\tau$ vérifie $t^{w-1} \in \mathbf{T}(1-\tau)$, alors w se relève à $\mathbf{N}_\tau$. On a donc

$$\mathbf{W}^*_\tau = \{w \in \mathbf{W}_\tau : t^{w-1} \in \mathbf{T}(1-\tau)\}.$$

Puisque $t \in \mathbf{T}(F)$ et $\mathbf{W} = \mathbf{W}(F)$, l'élément t^{w-1} appartient au groupe $\mathbf{T}(1-\tau)(F)$ des points F–rationnels de $\mathbf{T}(1-\tau)$. Notons $\mathbf{T}(F)(1-\tau)$ le sous–groupe de $\mathbf{T}(1-\tau)(F)$ formé des $y\tau(y)^{-1}$ pour $y \in \mathbf{T}(F)$. L'isomorphisme de groupes $\mathbf{N}_\tau/\mathbf{T}_\tau \to \mathbf{W}^*_\tau$ induit par restriction une application injective

$$\mathbf{N}^{\mathrm{sep}}_\tau(F)/\mathbf{T}_\tau(F) \to \mathbf{W}^*_\tau,$$

où (rappel) $\mathbf{N}^{\mathrm{sep}}_\tau = \mathbf{N}\cap\mathbf{H}^{\mathrm{sep}}_\tau$. Soit $\mathbf{W}^{*,\mathrm{sep}}_\tau \subset \mathbf{W}^*_\tau$ son image. Par définition, $\mathbf{W}^{*,\mathrm{sep}}_\tau$ est le sous–groupe de $\mathbf{W}_\tau$ formé des éléments qui se relèvent à $\mathbf{N}^{\mathrm{sep}}_\tau(F) = \mathbf{N}_\tau \cap \mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}})$, et de la même manière, on obtient l'égalité

$$\mathbf{W}^{*,\mathrm{sep}}_\tau = \{w \in \mathbf{W}_\tau : t^{w-1} \in \mathbf{T}(F)(1-\tau)\}.$$

Puisque $\mathbf{T}_\tau\mathbf{H}^\circ_\tau = \mathbf{H}^\circ_\tau\mathbf{T}_\tau$ est défini sur F, le groupe $\mathbf{H}_\tau$ est défini sur F si et seulement si $\mathbf{W}^{*,\mathrm{sep}}_\tau = \mathbf{W}^*_\tau$. ■

4.7. Tores maximaux et sous–espaces de Cartan de $\mathbf{H}^\natural(F)$. — Pour $\delta \in H^\natural_{\mathrm{reg}}$, le groupe $\mathbf{H}^\circ_\delta$ est un tore, et comme $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est quasi–semisimple, il est défini sur F. Par conséquent le groupe $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_\delta)$ est lui aussi défini sur F [**Bor**, ch. III, 9.2] — notons que puisque $\mathbf{T}$ est l'unique tore maximal τ–admissible de $\mathbf{H}$, cette assertion résulte aussi du lemme de 4.5.

Définition. — On appelle :
- *tore maximal de $H^\natural$* l'ensemble des points F–rationnels $\mathbf{S}^\natural(F)$ d'un tore maximal $\mathbf{S}^\natural$ de $\mathbf{H}^\natural$ défini sur F et tel que $\mathbf{S}^\natural \cap H^\natural_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$.
- *sous–espace de Cartan de $H^\natural$* l'ensemble des points F–rationnels $\mathbf{T}^\natural(F)$ d'un sous–espace de Cartan $\mathbf{T}^\natural$ de $\mathbf{H}^\natural$ défini sur F et tel que $\mathbf{T}^\natural \cap H^\natural_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$.

Par définition, un tore maximal de $H^\natural$ est une partie de la forme $\mathbf{H}^\circ_\delta(F)\cdot\delta$ pour un $\delta \in H^\natural_{\mathrm{reg}}$, et un sous–espace de Cartan de $H^\natural$ est une partie de la forme $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_\delta)(F)\cdot\delta$ pour un $\delta \in H^\natural_{\mathrm{reg}}$. Tout tore maximal $S^\natural$ de $H^\natural$ définit un *quadruplet de Cartan* $(S, S^\natural, T, T^\natural)$ *de* $H^\natural$:
- $S = \mathbf{H}^\circ_\delta(F)$ pour un (resp. pour tout) $\delta \in S^\natural \cap H^\natural_{\mathrm{reg}}$ — c'est un tore de H, et $S^\natural$ est un S–espace tordu trivial ;
- $T = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_\delta)(F)$ pour un (resp. pour tout) $\delta \in S^\natural \cap H^\natural_{\mathrm{reg}}$ — c'est un tore maximal de H ;
- $T^\natural = T\cdot S^\natural = S^\natural\cdot T$ — c'est un T–espace tordu.

De même, tout sous–espace de Cartan $T^\natural$ de $H^\natural$ définit un *triplet de Cartan* $(S, T, T^\natural)$ *de* $H^\natural$:
- $S = \mathbf{H}^\circ_\delta(F)$ pour un (resp. pour tout) $\delta \in T^\natural \cap H^\natural_{\mathrm{reg}}$;
- $T = Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^\circ_\delta)(F)$ pour un (resp. pour tout) $\delta \in T^\natural \cap H^\natural_{\mathrm{reg}}$.

L'application qui a $\delta \in T^\natural$ associe le quadruplet $(S, S\cdot\delta, T, T^\natural)$ est une bijection du $S\backslash T$–espace tordu $S\backslash T^\natural$ sur l'ensemble des quadruplets de Cartan de $H^\natural$ prolongeant $(S, T, T^\natural)$.

Proposition. — *Supposons le corps F infini, et soit $(S, S^\natural, T, T^\natural)$ un quadruplet de Cartan de $H^\natural$. Alors on a $S = Z_H(S^\natural) = Z_H(T^\natural)$ et $T = Z_H(S)$.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{S}^\natural$ le sous–espace de Cartan de $\mathbf{H}$ donné par $\mathbf{S}^\natural = \mathbf{H}_\delta^\circ \cdot \delta$ pour un (resp. pour tout) $\delta \in S^\natural \cap H^\natural_{\mathrm{reg}}$, et soit $(\mathbf{S}, \mathbf{S}^\natural, \mathbf{T}, \mathbf{T}^\natural)$ le quadruplet de Cartan de $\mathbf{H}^\natural$ associé à $\mathbf{S}^\natural$. Alors $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^\natural$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^\natural$ sont définis sur F et leurs ensembles de points F–rationnels coïncident avec S, $S^\natural$, T, $T^\natural$. Posant $Z_{\mathbf{H}}(S^\natural) = \{h \in \mathbf{H} : \delta\cdot h = h\cdot\delta\}$, on a l'inclusion $Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}^\natural) \subset Z_{\mathbf{H}}(S^\natural)$. Soit $h \in \mathbf{H}$. Posons $\mathbf{S}^\natural_h = \{\delta \in \mathbf{S}^\natural : \delta\cdot h = h\cdot\delta\}$. C'est une sous–variété fermée de $\mathbf{S}^\natural$, et l'on a $\mathbf{S}^\natural_h = \mathbf{S}^\natural$ si et seulement si $h \in Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}^\natural)$. De même, posant $S^\natural_h = \{\delta \in S^\natural : \delta\cdot h = h\cdot\delta\}$, on a $S^\natural_h = S^\natural$ si et seulement si $h \in Z_{\mathbf{H}}(S^\natural)$. Puisque F est infini, $S^\natural$ est dense dans $\mathbf{S}^\natural$ (cf. la remarque de 4.3), par conséquent si $S^\natural_h = S^\natural$ alors $\mathbf{S}^\natural_h = \mathbf{S}^\natural$, d'où l'inclusion $Z_{\mathbf{H}}(S^\natural) \subset Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}^\natural)$ $(= \mathbf{S})$, puis l'égalité $Z_H(S^\natural) = S$. Le même raisonnement entraîne que $Z_H(T^\natural) = S$, et que $Z_H(S) = T$. □

Corollaire. — (1) *Deux quadruplets de Cartan $(S, S^\natural, T, T^\natural)$ et $(S', S'^\natural, T', T'^\natural)$ de $H^\natural$ sont conjugués dans H si et seulement si les tores maximaux $S^\natural$ et $S'^\natural$ de $H^\natural$ le sont.*

(2) *Deux triplets de Cartan $(S, T, T^\natural)$ et $(S', T', T'^\natural)$ de $H^\natural$ sont conjugués dans H si et seulement si les sous–espaces de Cartan $T^\natural$ et $T'^\natural$ de $H^\natural$ le sont.*

Démonstration. — Prouvons (1). Il s'agit de montrer que si $S'^\natural = h\cdot S^\natural\cdot h^{-1}$ pour un $h \in H$, alors on a

$$(S', S'^\natural, T', T'^\natural) = h\cdot(S, S^\natural, T, T^\natural)\cdot h^{-1}.$$

Puisque $S = Z_H(S^\natural)$ et $S' = Z_H(S'^\natural)$, on a $S' = hSh^{-1}$, et puisque $T = Z_H(S)$ et $T' = Z_H(S')$, on a $T' = hTh^{-1}$. On en déduit que

$$T'^\natural = T'\cdot S'^\natural = (hTh^{-1})\cdot(h\cdot S^\natural\cdot h^{-1}) = h\cdot(T\cdot S^\natural)\cdot h^{-1} = h\cdot T^\natural\cdot h^{-1}.$$

Le point (2) s'obtient de la même manière, en utilisant que $S = Z_H(T^\natural)$. □

4.8. $\mathbf{H}(F)$–orbites dans $\mathbf{H}^\natural(F)$. — Pour $\delta \in H^\natural$, la $\mathbf{H}$–orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est définie sur F, et l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ de ses points F–rationnels est réunion de H–orbites de la forme

$$\mathcal{O}_H(\delta') = \{h^{-1}\cdot\delta'\cdot h : h \in H\}$$

pour $\delta' \in \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$. D'autre part, le morphisme $\pi_\delta : \mathbf{H} \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$, $h \mapsto h^{-1}\cdot\delta\cdot h$ est défini sur F, et s'il est séparable (e.g. si $p = 1$, ou si δ est semisimple d'après [**Bor**, ch. III, 9.1]), alors $\mathbf{H}_\delta$ est défini sur F et $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ est « le » quotient de $\mathbf{H}$ par $\mathbf{H}_\delta$ [**Bor**, ch. II, 6.7] ; en ce cas π_δ induit une application surjective $\mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}}) \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F^{\mathrm{sep}})$, et l'étude des H–orbites dans $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ se ramène à un problème de cohomologie galoisienne.

Remarques. — (1) Soit un élément $\delta \in H^\natural$ tel que le groupe $\mathbf{H}_\delta$ est défini sur F. Alors le morphisme bijectif

$$\bar{\pi}_\delta : \mathbf{H}_\delta\backslash\mathbf{H} \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta),\ h \mapsto h^{-1}\cdot\delta\cdot h$$

est défini sur F. Par passage aux points F–rationnels, il induit une application injective

$$(\mathbf{H}_\delta\backslash\mathbf{H})(F) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$$

qui n'est en général pas surjective, même si $F = F^{\mathrm{sep}}$ — elle l'est si le morphisme π_δ est séparable, puisqu'en ce cas $\bar{\pi}_\delta$ est un isomorphisme. Comme le morphisme quotient $\mathbf{H} \to \mathbf{H}_\delta\backslash\mathbf{H}$ induit une application surjective $\mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}}) \to (\mathbf{H}_\delta\backslash\mathbf{H})(F^{\mathrm{sep}})$, l'application

$\mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}}) \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F^{\mathrm{sep}})$, $h \mapsto h^{-1} \cdot \delta \cdot h$ est surjective si et seulement si l'application $(\mathbf{H}_\delta \backslash \mathbf{H})(F^{\mathrm{sep}}) \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F^{\mathrm{sep}})$ est bijective. Si maintenant on suppose seulement que $\mathbf{H}_\delta^\circ$ est défini sur F (e.g. si δ quasi–semisimple, d'après le théorème de 4.6), alors $\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} = (\mathbf{H}_\delta \cap \mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}}))\mathbf{H}_\delta^\circ$ est défini sur F, et puisque $\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}}(F^{\mathrm{sep}}) = \mathbf{H}_\delta \cap \mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}})$, on obtient aussi que l'application $\mathbf{H}(F^{\mathrm{sep}}) \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F^{\mathrm{sep}})$, $h \mapsto h^{-1} \cdot \delta \cdot h$ est surjective si et seulement si l'application $(\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H})(F^{\mathrm{sep}}) \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F^{\mathrm{sep}})$ est bijective.

(2) Soit $\delta \in H^\natural$ quasi–semisimple tel que le morphisme π_δ est séparable. Supposons que le groupe $\mathbf{H}_\delta$ est connexe (e.g. si δ est unipotent, ou si $\mathbf{H}$ est semisimple simplement connexe). Si δ est régulier, alors $\mathbf{H}_\delta = \mathbf{H}_\delta^\circ$ est un tore. Ce tore se déploie sur une sous–extension finie F_1/F de F^{sep}/F, et d'après la remarque 2 de 4.1, pour toute sous–extension F'/F_1 de $\overline{F}/F_1$, π_δ induit une application surjective $\mathbf{H}(F') \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F')$.

(3) Supposons que F est un corps « de type (F) » au sens de [**Se**, ch. III, §4.2] ; i.e. que F est parfait et que pour chaque entier $n \geq 1$, il n'existe qu'un nombre fini de sous–extensions de $\overline{F}/F$ de degré n. Alors d'après [**Se**, ch. III, §4.4, théo. 5], pour $\delta \in H^\natural$, l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ est réunion d'un nombre *fini* de H–orbites. ■

4.9. La topologie ϖ–adique (cas d'un corps local non archimédien). — On suppose dans ce n° que F est un corps commutatif localement compact non archimédien. On note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F, et l'on choisit une uniformisante ϖ de F.

Si $\mathbf{X}$ est une variété algébrique affine définie sur F, on peut munir l'ensemble $X = \mathbf{X}(F)$ de ses points F–rationnels de la *topologie définie par F*, appelée aussi *topologie ϖ–adique* : c'est la topologie la *moins fine* rendant continues les applications $X \to F$ induites par les éléments de l'algèbre affine $F[\mathbf{X}]$. Elle est *plus fine* que la topologie de Zariski restreinte à X. Cela fait de X un td–espace. Si de plus $\mathbf{X}$ est lisse, alors X est une *variété (analytique) ϖ–adique* au sens de [**HC1**, ch. V, §2], et sa dimension comme variété ϖ–adique, notée $\dim(X)$, coïncide avec $\dim(\mathbf{X})$.

Munissons les ensembles de points F–rationnels $H = \mathbf{H}(F)$ et $H^\natural = \mathbf{H}^\natural(F)$ de la topologie ϖ–adique. Cela fait de H un groupe topologique localement profini, et de $H^\natural$ un td–espace et un H–espace topologique tordu. Les td–espaces H et $H^\natural$ sont des variétés ϖ–adiques, de même dimension $\dim(\mathbf{H}) = \dim(\mathbf{H}^\natural)$, et pour $\delta \in H^\natural$, le td–espace $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ est une variété ϖ–adique de dimension $\dim(\mathbf{H}) - \dim(\mathbf{H}_\delta)$. Rappelons que pour $\delta \in H^\natural$, on a posé

$$\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} = \mathbf{H}_\delta(F^{\mathrm{sep}})\mathbf{H}_\delta^\circ$$

et

$$H_\delta = \{h \in H : \mathrm{Int}_{H^\natural}(\delta)(h) = h\}.$$

Pour $\delta \in H^\natural$, on a

$$\dim(\mathbf{H}_\delta) = \dim(\mathbf{H}_\delta^\circ) = \dim(\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}}),$$

et si $\mathbf{H}_\delta^\circ$ est défini sur F, i.e. si $\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}}$ est défini sur F, on a $H_\delta = \mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}}(F)$.

Si $\mathbf{H} = \mathbb{GL}_n$, l'ensemble $\{1 + \varpi^k M(n, \mathfrak{o}_F) : k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ est une base de voisinages de 1 dans $\mathrm{GL}_n(F)$ formée de sous–groupes ouverts compacts. Dans le cas général, la topologie ϖ–adique sur H coïncide avec celle déduite de $\mathrm{GL}_n(F)$ par restriction, via le choix de n'importe quel F–plongement $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathbb{GL}_n$. En particulier, H est réunion dénombrable d'ouverts compacts (cela résulte par exemple de la décomposition de Cartan pour $\mathrm{GL}_n(F)$).

Proposition 1. — *Pour $\delta \in H^\natural$ quasi–semisimple, la H–orbite $\mathcal{O}_H(\delta)$ est fermée dans H (pour la topologie ϖ–adique), et l'application bijective $H_\delta \backslash H \to \mathcal{O}_H(\delta)$, $h \mapsto h^{-1} \cdot \delta \cdot h$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. — Soit $\delta \in H^\natural$ quasi–semisimple. D'après le théorème de 4.6, le groupe $\mathbf{H}_\delta^\circ$ est défini sur F, et $H_\delta = \mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}}(F)$ est une variété ϖ–adique de dimension $\dim(\mathbf{H}_\delta^\circ)$. Par suite la variété ϖ–adique $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ a pour dimension $\dim(H) - \dim(H_\delta)$.

La première assertion est une conséquences de résultats rappelés dans l'Annexe C. Supposons le morphisme π_δ séparable. En ce cas $\mathbf{H}_\delta$ est défini sur F, et la H–orbite $\mathcal{O}_H(\delta)$ est une sous–variété ϖ–adique de $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$, de même dimension $\dim(H) - \dim(H_\delta)$. D'après le lemme 1 de C.5, elle est ouverte dans $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$, et toutes les H–orbites dans $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ sont ouvertes et fermées dans $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$.

Supposons maintenant que le morphisme π_δ n'est pas séparable. On a donc $p > 1$, et π_δ se décompose en

$$\pi_\delta = \bar{\pi}'_\delta \circ q : \mathbf{H} \xrightarrow{q} \mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H} \xrightarrow{\bar{\pi}'_\delta} \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$$

où q est le morphisme quotient — il est séparable, et défini sur F puisque $\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}}$ l'est — et $\bar{\pi}'_\delta$ est un morphisme non séparable défini sur F. Ces morphismes sont surjectifs, et même dominants puisque toutes les variétés sont irréductibles. D'après le lemme de C.10, il existe un ouvert affine non vide $\mathbf{U} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ tel que, posant $\mathbf{U}' = (\bar{\pi}'_\delta)^{-1}(\mathbf{U})$, le morphisme

$$\eta = \bar{\pi}'_\delta|_{\mathbf{U}'} : \mathbf{U}' \to \mathbf{U}$$

est *fini*, i.e. le comorphisme (injectif)

$$\eta^\sharp : \overline{F}[\mathbf{U}] \to \overline{F}[\mathbf{U}']$$

fait de la $\overline{F}$–algèbre $\overline{F}[\mathbf{U}']$ un $\overline{F}[\mathbf{U}]$–module de type fini. Par homogénéité on en déduit que le morphisme $\bar{\pi}'_\delta$ lui–même est fini. Puisque le morphisme q est séparable, l'application $q_F : H \to (\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H})(F)$ est ouverte (lemme 1 de C.5), et la H–orbite $q_F(H)$ est ouverte et fermée dans $(\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H})(F)$. D'autre part puisque le morphisme $\bar{\pi}'_\delta$ est fini, l'application $(\bar{\pi}'_\delta)_F : (\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H})(F) \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ est fermée (remarque (3) de C.5), et la H–orbite

$$(\bar{\pi}'_\delta)_F(q_F(H)) = \mathcal{O}_H(\delta)$$

est fermée dans $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$. D'où la première assertion de la proposition, puisque d'après la proposition de 3.14, $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ est une partie fermée de $H^\natural$.

La seconde assertion résulte de [**BZ**, ch. 1, cor. 1.6]. □

Remarque. — Soit $L = \overline{F}(\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta))$ et $M = \overline{F}(\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H})$ les corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$ et sur $\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H}$. Le comorphisme

$$(\bar{\pi}'_\delta)^\sharp : \overline{F}[\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)] \to \overline{F}[\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H}]$$

induit par passage aux corps des fractions un morphisme injectif de corps, disons $\iota : L \to M$, qui fait de M une extension finie de L. Soit L'/L la sous–extension séparable maximale de M/L. Son degré m coïncide avec le cardinal du noyau de $\bar{\pi}'_\delta$, c'est–à–dire avec le cardinal de $\mathbf{H}_\delta^{\mathrm{sep}} \backslash \mathbf{H}_\delta$, lequel est premier à p (remarque 1 de 3.7). D'autre part si le morphisme π_δ n'est pas séparable, alors l'extension L/L' est purement inséparable de degré $q = p^s$, $s \geq 1$. ■

Si $p = 1$, alors F est un corps « de type (F) » au sens de [**Se**, ch. III, §4.2] (cf. la remarque (3) de 4.8) et pour $\delta \in H^\natural$, l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ est réunion finie de H–orbites (loc. cit.). En général, on a le résultat plus faible suivant :

Proposition 2. — *Soit $\delta \in H^\natural$. Supposons que le morphisme π_δ est séparable, que le groupe $\mathbf{H}_\delta^\circ$ est réductif, et que le groupe quotient $\mathbf{H}_\delta / \mathbf{H}_\delta^\circ$ est d'ordre premier à p. Alors l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ est réunion* finie *de H–orbites.*

Démonstration. — On peut supposer $p > 1$. Alors F est isomorphe à un corps de séries formelles $\mathbb{F}_q((\varpi))$ où $\mathbb{F}_q$ désigne le corps fini à $q\,(=p^r)$ éléments. Puisque le morphisme π_δ est séparable, le groupe $\mathbf{H}_\delta$ est défini sur F, le quotient $\mathbf{H}/\mathbf{H}_\delta$ l'est aussi, et le morphisme $\mathbf{H} \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)$, $h \mapsto h \cdot \delta \cdot h^{-1}$ induit une application bijective $(\mathbf{H}/\mathbf{H}_\delta)(F) \to \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$. Pour toute sous–extension F'/F de F^{sep}/F et toute variété algébrique affine $\mathbf{V}$ défini sur F', on note $\mathrm{H}^1(F', \mathbf{V})$ l'ensemble pointé $\mathrm{H}^1(\Sigma(F^{\mathrm{sep}}/F'), \mathbf{V}(F^{\mathrm{sep}}))$ défini dans [**Se**, ch. III, §1]. D'après [**Se**, ch. I, §5.4, cor. 1], le quotient de $(\mathbf{H}/\mathbf{H}_\delta)(F)$ par H s'identifie au noyau (dans la catégorie des ensembles pointés) de l'application canonique $\mathrm{H}^1(F, \mathbf{H}_\delta) \to \mathrm{H}^1(F, \mathbf{H})$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble $\mathrm{H}^1(F, \mathbf{H}_\delta)$ est fini. Puisque $\mathbf{H}_\delta^\circ$ est défini sur F et distingué dans $\mathbf{H}_\delta$, on a la suite exacte longue d'ensembles pointés [**Se**, ch. I, §5.5, prop. 38]

$$\mathrm{H}^1(F, \mathbf{H}_\delta^\circ) \to \mathrm{H}^1(F, \mathbf{H}_\delta) \to \mathrm{H}^1(F, \mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ).$$

Puisque $\mathbf{H}_\delta^\circ$ est réductif connexe, d'après [**BT3**, ch. III, théo. 3.12] (cf. [**Se**, ch. III, §4.3, rem. 2]), l'ensemble $\mathrm{H}^1(F, \mathbf{H}_\delta^\circ)$ est fini. Il suffit donc de montrer que l'ensemble $H^1(F, \mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ)$ est fini. Soit F^{mod}/F la sous–extension modérément ramifiée maximale de F^{sep}/F, et soit $\Sigma^{\mathrm{mod}} = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{mod}}/F)$ son groupe de Galois. Puisque $\mathbf{H}_\delta$ est défini sur F, le groupe quotient $\mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ$ l'est aussi, et comme les composantes connexes de $\mathbf{H}_\delta$ sont définies sur F^{sep} [**Bor**, ch. AG, 12.3], on a $\mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ = (\mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ)(F^{\mathrm{sep}})$. Comme le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F^{\mathrm{mod}})$ est un pro-p-groupe et que (par hypothèse) le groupe $\mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ$ est d'ordre premier à p, on a $\mathrm{H}^1(F^{\mathrm{mod}}, \mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ) = 0$. D'après [**Se**, ch. I, §2.7.b], on a donc une identification canonique

$$\mathrm{H}^1(F, \mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ) = \mathrm{H}^1(\Sigma^{\mathrm{mod}}, (\mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ)(F^{\mathrm{mod}})).$$

Or pour chaque entier $n \geq 1$, il n'existe qu'un nombre fini de sous–extensions de F^{mod}/F de degré n. Par suite le groupe Σ^{mod} est « de type (F) » au sens de [**Se**, ch. III, §4.1], et l'ensemble $\mathrm{H}^1(\Sigma^{\mathrm{mod}}, (\mathbf{H}_\delta/\mathbf{H}_\delta^\circ)(F^{\mathrm{mod}}))$ est fini [**Se**, ch. III, §4.1, prop. 8]. D'où la proposition. □

D'après le théorème et la remarque 1 de 3.7, on a le

Corollaire. — *Pour $\delta \in H^\natural$ quasi–semisimple tel que le morphisme π_δ est séparable (e.g. si $\mathbf{H}$ est semisimple et simplement connexe, d'après le corollaire de 3.7), l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ est réunion finie de H–orbites.*

Exemples. — Rappelons que le groupe $F^\times/(F^\times)^2$ est fini si et seulement si F est de caractéristique différente de 2.

(1) Soit $\mathbf{H} = \mathbb{SL}_2$. Il existe une unique $\mathbf{H}$–orbite unipotente non triviale dans $\mathbf{H}$: celle de l'élément $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$. Pour $x \in F^\times$, notons $\mathcal{O}_x$ la H–orbite de l'élément $u_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathcal{O}_x$ ne dépend que de l'image de x dans $F^\times/(F^\times)^2$, et $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(u)(F)$ est l'union disjointe des H–orbites $\mathcal{O}_x$ pour $x \in F^\times/(F^\times)^2$.

(2) Soit $\mathbf{H} = \mathbb{GL}_2$, et soit γ l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}$ de H. Son polynôme caractéristique est $t^2 + \varpi$. Il est irréductible sur F et séparable si et seulement si la caractéristique de F est différente de 2, auquel cas γ est semisimple régulier. Si F est de caractéristique 2, alors γ est conjugué dans $\mathbf{H}$ à l'élément $\begin{pmatrix} \varpi^{\frac{1}{2}} & 1 \\ 0 & \varpi^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, où $\varpi^{\frac{1}{2}}$ est l'unique racine (double) de $t^2 + \varpi$ dans $\overline{F}$.

(3) Soit τ le F–automorphisme $t \mapsto t^{-1}$ de $\mathbf{H} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, et posons $\mathbf{H}^\natural = \mathbf{H}\tau$. Pour $\delta \in H^\natural$ et $t \in \mathbf{H}$, on a $t^{-1} \cdot \delta \cdot t = t^{-2} \cdot \delta$, par conséquent $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta) = \mathbf{H}^\natural$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ est l'union disjointe des H–orbites $\mathcal{O}_H(x \cdot \delta)$ pour x parcourant un système de représentants dans $F^\times$ des classes de $F^\times/(F^\times)^2$. Notons que le morphisme $1 - \tau$ de $\mathbf{H}$ est séparable si et seulement si F est de caractéristique différente de 2. ■

5. Caractères tordus d'un groupe réductif $\mathfrak{p}$–adique

Dans ce chapitre, on fixe un corps commutatif localement compact non archimédien F, et un groupe algébrique réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur F. On note $G = \mathbf{G}(F)$ le groupe des points F–rationnels de $\mathbf{G}$ *muni de la topologie ϖ–adique*, où ϖ désigne une uniformisante de F. Pour la théorie de base des groupe réductifs ϖ–adiques, on renvoie à [**BT1, BT2**]. On fixe un $\mathbf{G}$–espace tordu $\mathbf{G}^\natural$ défini sur F et possédant un point F–rationnel δ_1. On note $G^\natural$ le G–espace tordu $\mathbf{G}^\natural(F)$, et θ le F–automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(\delta_1)$ de $\mathbf{G}$. On a donc $G^\natural = G \cdot \delta_1 \subset \mathbf{G}^\natural$. On fixe aussi un caractère ω de G.

5.1. Paires paraboliques de G. — On appelle *paire parabolique de G* une paire (P, A) formée d'un sous–groupe parabolique P de G et d'un tore déployé maximal A du radical $R(P)$ de P.

Si P est un sous–groupe parabolique de G, on note $U_P = R_{\mathrm{u}}(P)$ son radical unipotent. Si (P, A) est une paire parabolique de G, on note $M_A = Z_G(A)$ le centralisateur de A dans G. Alors M_A est une *composante de Levi de P*, i.e. on a la décomposition en produit semidirect

$$P = M_A \ltimes U_P.$$

De plus, la paire (P, A) est θ–stable si et seulement si les groupes U_P et M_A sont θ–stables.

Fixons une paire parabolique minimale $(P_\circ, A_\circ)$ de G. On ne suppose pas qu'il existe une telle paire qui soit θ–stable [12]. Posons $U_\circ = R_{\mathrm{u}}(P_\circ)$ et $M_\circ = M_{A_\circ}$, et notons $\mathcal{P}_\circ$ l'ensemble des sous–groupes paraboliques de G contenant $P_\circ$. Pour $P \in \mathcal{P}_\circ$, on note :

– M_P l'unique composante de Levi de P contenant $M_\circ$;
– P^- le sous–groupe parabolique de G opposé à P par rapport à M_P ;
– A_P le tore déployé maximal du centre M_P.

On a donc

$$M_P = M_{A_P} = P \cap P^- \quad (P \in \mathcal{P}_\circ).$$

De plus, l'application $P \mapsto (P, A_P)$ identifie $\mathcal{P}_\circ$ à l'ensemble des paires paraboliques (P, A) de G telles que $P \supset P_\circ$ et $A \subset A_\circ$, et $\mathcal{P}_\circ$ paramétrise l'ensemble des classes de conjugaison de paires paraboliques de G.

Notons $\mathcal{P}_\circ^\theta$ le sous–ensemble de $\mathcal{P}_\circ$ formé des paires paraboliques θ–stables, i.e. posons

$$\mathcal{P}_\circ^\theta = \{P \in \mathcal{P}_\circ : \theta(P) = P \text{ et } \theta(A_P) = A_P\}.$$

Notons que $\mathcal{P}_\circ^\theta$ est non vide (la paire parabolique maximale (G, A_G) est θ–stable). Notons aussi que — contrairement à ce que la notation pourrait faire croire — si la paire $(P_\circ, A_\circ)$ n'est pas θ–stable, alors :

– θ *n'opère pas* sur $\mathcal{P}_\circ$ (vu comme ensemble de paires paraboliques) ;
– $\mathcal{P}_\circ^\theta$ *ne paramétrise pas* l'ensemble des classes de conjugaison de paires paraboliques θ–stables de G.

12. Même si l'on peut toujours s'arranger pour que ce soit le cas, cf. la remarque plus loin.

Remarque. — Puisque $(\theta(P_\circ), \theta(A_\circ))$ est encore une paire parabolique minimale de G, il existe un $x \in G$ tel que $\theta(P_\circ) = x^{-1}P_\circ x$ et $\theta(A_\circ) = x^{-1}A_\circ x$. Par suite, posant $\delta_1' = x \cdot \delta_1$ et $\theta' = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\delta_1') \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{G})$, on a $\theta'(P_\circ) = P_\circ$ et $\theta'(A_\circ) = A_\circ$, i.e. la paire $(P_\circ, A_\circ)$ est θ'–stable.

Lemme. — *Supposons que la paire $(P_\circ, A_\circ)$ est θ–stable. Alors θ opère sur l'ensemble $\mathcal{P}_\circ$ de manière compatible avec l'identification « $P = (P, A_P)$ » : pour $P \in \mathcal{P}_\circ$, on a $A_{\theta(P)} = \theta(A_P)$. De plus, $\mathcal{P}_\circ^\theta$ paramétrise l'ensemble des classes de G-conjugaison de paires paraboliques θ–stables de G.*

Démonstration. — Pour $P \in \mathcal{P}_\circ$, puisque $\theta(P_\circ) = P_\circ$, on a $\theta(P) \in \mathcal{P}_\circ$, et puisque $\theta(A_\circ) = A_\circ$, on a $\theta(A_P) \subset A_\circ$ et $\theta(A_P) = A_{\theta(P)}$. Par suite, θ opère sur $\mathcal{P}_\circ$ de manière compatible avec l'identification « $P = (P, A_P)$ ». En particulier, on a $\mathcal{P}_\circ^\theta = \{P \in \mathcal{P}_\circ : \theta(P) = P\}$.

Soit (P, A) une paire parabolique θ–stable de G. Il existe un $g \in G$ tel que $g^{-1}Pg \supset P_\circ$ et $g^{-1}Ag \subset A_\circ$, i.e. tel que $g^{-1}Pg \in \mathcal{P}_\circ$ et $A_{g^{-1}Pg} = g^{-1}Ag$. Posons $x = g^{-1}\theta(g)$. Puisque

$$P_\circ \subset \theta(g^{-1}Pg) = \theta(g^{-1})P\theta(g) = x^{-1}(g^{-1}Pg)x,$$

on a $\theta(g^{-1}Pg) = g^{-1}Pg$. Par suite, $\mathcal{P}_\circ^\theta$ paramétrise l'ensemble des classes de G-conjugaison de paires paraboliques θ–stables de G. □

5.2. Mesures normalisées. — Soit $|\ |_F$ la valeur absolue sur F normalisée par

$$|\varpi|_F = q^{-1},$$

où q est le cardidal du corps résiduel de F. Soit $K_\circ$ le stabilisateur dans

$$G^1 = \bigcap_{\psi \in \mathrm{X}_F^*(\mathbf{G})} \ker |\psi|_F$$

d'un sommet spécial de l'appartement $\mathcal{A}_\circ = \mathcal{A}(G, A_\circ)$ associé à $A_\circ$ de l'immeuble (non étendu) de G ; où $\mathrm{X}_F^*(\mathbf{G})$ est le groupe des caractères algébriques de $\mathbf{G}$ définis sur F. Ainsi $K_\circ$ est un sous–groupe ouvert compact maximal (spécial) de G, et pour tout $P \in \mathcal{P}_\circ$, on a :

(i) $G = K_\circ P = K_\circ M_P U_P$;

(ii) $K_\circ \cap P = (K_\circ \cap M_P)(K_\circ \cap U_P)$;

(iii) $K_\circ \cap P^- = (K_\circ \cap M_P)(K_\circ \cap U_{P^-})$.

Remarques. — (1) Pour $i \in \mathbb{Z}$, $\theta^i(K_\circ)$ est encore un sous–groupe ouvert compact maximal spécial de G, et si la paire $(P_\circ, A_\circ)$ est θ–stable, alors $\theta^i(K_\circ)$ vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessus (pour tout $P \in \mathcal{P}_\circ$). Notons qu'il n'est en général pas possible de choisir θ' et $K_\circ$ tels que $(P_\circ, A_\circ)$ et $K_\circ$ soient θ'–stables, même si G est *non ramifié* (c'est–à–dire quasi–déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée de F), cf. la remarque suivante.

(2) Prenons pour $\mathbf{G}$ le groupe $\mathbb{SL}_{2/F}$, et pour θ l'automorphisme donné par la conjugaison par un élément de $\mathrm{GL}_2(F)$ dont le déterminant est une uniformisante de F. Le groupe $\mathbf{G}$ est déployé sur F — donc a fortiori non ramifié —, et pour tout $x \in \mathbf{G}(F)$, le F–automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(x) \circ \theta$ de $\mathbf{G}$ change le type des sous–groupes hyperspéciaux de $\mathbf{G}(F)$. Il ne peut donc en stabiliser aucun. ■

Définition. — Pour un sous–groupe fermé H de G, on appelle *mesure de Haar à gauche sur H normalisée par $K_\circ$* l'unique mesure de Haar à gauche $d_l h$ sur H telle que

$$\mathrm{vol}(H \cap K_\circ, d_l h) = 1.$$

Soit dg la mesure de Haar sur G normalisée par $K_\circ$. Si K est un sous–groupe ouvert compact de G, on note aussi dk la mesure $dg|_K$ sur K.

Pour $P \in \mathcal{P}_\circ$, on note dm_P et du_P les mesures de Haar sur M_P et U_P normalisées par $K_\circ$, et l'on pose $d_lp_P = dm_Pdu_P$; c'est la mesure de Haar à gauche sur P normalisée par $K_\circ$. Pour $x \in P$, on a donc (abus d'écriture)

$$\Delta_P(x)d_l(xpx^{-1})_P = d_lp_P.$$

Grâce à dm_P, on définit les caractères de M_P comme en 2.2. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on omettra l'indice P dans les notations dm_P, du_P et d_lp_P. Pour toute représentation lisse σ de M_P, on pose

$$\sigma(f) = \sigma(fdm_P) \quad (f \in C_c^\infty(M_P)),$$

et si σ est admissible, on note Θ_σ et Θ_σ^B (pour $B \in \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$) le caractère et le caractère B–tordu de σ définis grâce à dm_P comme en 2.2 et 2.3.

5.3. sous–espaces paraboliques de $G^\natural$. — On appelle *sous–espace parabolique de $G^\natural$* un sous–espace topologique tordu de $G^\natural$ (cf. 2.4) qui est un P–espace tordu pour un sous–groupe parabolique P de G ; i.e. un sous–espace topologique de $G^\natural$ de la forme $P \cdot \gamma$ pour un sous–groupe parabolique P de G et un élément $\gamma \in G^\natural$ tel que $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)(P) = P$. Si P est un sous–groupe parabolique de G, puisque $N_G(P) = P$, il existe *au plus* un sous–espace parabolique de G de $G^\natural$ qui est un P–espace tordu. En d'autres termes, l'application $P^\natural \mapsto P$ de l'ensemble des sous–espaces parabolique de $G^\natural$ dans l'ensemble des sous–groupes paraboliques de G, est injective.

Notons que pour tout sous–espace parabolique $P^\natural = P \cdot \gamma$ de $G^\natural$, notant $N_G(P^\natural)$ le normalisateur $\{g \in G : g^{-1} \cdot P^\natural \cdot g = P^\natural\}$ de $P^\natural$ dans $G^\natural$, on a

$$N_G(P^\natural) = N_G(P) = P.$$

Si $P^\natural$ est un sous–espace parabolique de $G^\natural$, on appelle *composante de Levi de $P^\natural$* un sous–espace topologique tordu de $P^\natural$ qui est un M–espace tordu pour une composante de Levi de M de P ; i.e. un sous–espace topologique $M^\natural$ de $P^\natural$ de la forme $M \cdot \gamma$ pour une composante de Levi M de P et un élément $\gamma \in P^\natural$ tel que $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)(M) = M$.

Lemme 1. — *Soit $P^\natural$ un sous–espace parabolique de $G^\natural$. Il existe une composante de Levi $M^\natural$ de $P^\natural$. L'application $M^\natural \mapsto M$ de l'ensemble des composantes de Levi de $P^\natural$ dans l'ensemble des composantes de Levi de P, est bijective. En particulier si $M^\natural$ et $M'^\natural$ sont deux composantes de Levi de $P^\natural$, alors il existe un unique $u \in U_P$ tel que $M'^\natural = u \cdot M^\natural \cdot u^{-1}$.*

Démonstration. — Écrivons $P^\natural = P \cdot \gamma$, et soit $\tau = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$. Puisque $\tau(P) = P$, on a $\tau(U_P) = U_P$. Soit M une composante de Levi de P. Alors $\tau(M)$ est une autre composante de Levi de M, et il existe un unique $u \in U_P$ tel que $\tau(M) = u^{-1}Mu$. Posons $\gamma' = u \cdot \gamma \in P^\natural$ et $\tau' = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma')$. Alors $\tau'(M) = M$ et $M \cdot \gamma'$ est une composante de Levi de $P^\natural$.

D'après ce qui précède, l'application $M^\natural \mapsto M$ de l'ensemble des composantes de Levi de $P^\natural$ dans l'ensemble des composantes de Levi P, est surjective. Elle est aussi injective car pour toute composante de Levi M de P, on a $N_G(M) \cap P = M$. D'où la dernière assertion du lemme. ☐

Soit $P^\natural$ un sous–espace parabolique de $G^\natural$. Puisque

$$\mathrm{Int}_{P^\natural}(\gamma)(U_P) = U_P \quad (\gamma \in P^\natural),$$

on peut considérer l'espace topologique tordu quotient $P^\natural/U_P$ (cf. 2.4). Pour toute composante de Levi $M^\natural$ de $P^\natural$, on a la *décomposition de Levi*

$$P^\natural = M^\natural \cdot U_P;$$

i.e. tout élément $\gamma \in P^\natural$ se décompose de manière unique en $\gamma = \delta \cdot u$ où $\delta \in M^\natural$, $u \in U_P$ et $\mathrm{Int}_{P^\natural}(\delta)(U_P) = U_P$. De plus, l'inclusion $M^\natural \subset P^\natural$ induit un isomorphisme d'espaces topologiques tordus $M^\natural \to P^\natural/U_P$.

Soit $\mathcal{P}_\circ^\natural$ l'ensemble des sous–espaces paraboliques $P^\natural$ de $G^\natural$ tel que $P = N_G(P^\natural)$ est un élément de $\mathcal{P}_\circ$. L'application

$$\mathcal{P}_\circ^\natural \to \mathcal{P}_\circ,\ P^\natural \mapsto P = N_G(P^\natural)$$

est injective, d'image le sous–ensemble de $\mathcal{P}_\circ$, disons $\mathcal{P}_\circ^{(\natural)}$, formé des $P \in \mathcal{P}_\circ$ tels qu'il existe un sous–espace parabolique $P^\natural$ de $G^\natural$ qui est un P–espace tordu. D'après le lemme, pour chaque $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$, il existe une unique composante de Levi de $P^\natural$ qui est un M_P–espace tordu ; on la note $M_P^\natural$. On en déduit que $\mathcal{P}_\circ^\natural$ paramétrise :

- l'ensemble des classes de G–conjugaison de sous–espaces paraboliques de $G^\natural$;
- l'ensemble des classes de G–conjugaison de sous–espaces paraboliques $P^\natural$ de $G^\natural$ munis d'une décomposition de Levi $P^\natural = M_P^\natural \cdot U_P$.

Pour $P \in \mathcal{P}_\circ^\theta$, l'ensemble $P \cdot \delta_1$ est un sous–espace parabolique de $G^\natural$. D'où l'inclusion

$$\mathcal{P}_\circ^\theta \subset \mathcal{P}_\circ^{(\natural)}.$$

Lemme 2. — *Supposons que la paire $(P_\circ, A_\circ)$ est θ–stable. Alors on a l'égalité $\mathcal{P}_\circ^\theta = \mathcal{P}_\circ^{(\natural)}$, et pour $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$ de groupe sous–jacent $P = N_G(P^\natural)$, on a $P^\natural = P \cdot \delta_1$ et $M_P^\natural = M_P \cdot \delta_1$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $\mathcal{P}_\circ^{(\natural)} \subset \mathcal{P}_\circ^\theta$. Soit $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$. Écrivons $P^\natural = P \cdot \gamma$, et $\gamma = g \cdot \delta_1$ avec $g \in G$. Soit $\tau = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$. Puisque $\tau(P) = P$ et $\tau = \mathrm{Int}_G(g) \circ \theta$, on a $\theta(P) = \mathrm{Int}_G(g^{-1})(P)$. Or $\theta(P) \in \mathcal{P}_\circ$, d'où $\theta(P) = P$ et $g \in N_G(P) = P$.

Soit $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$ de groupe sous–jacent $P = N_G(P^\natural)$. On vient de montrer que $P^\natural = P \cdot \delta_1$. D'après le lemme de 5.1, on a $\theta(A_P) = A_P$ d'où $\theta(M_P) = M_P$, et donc (d'après le lemme 1) $M_P^\natural = M_P \cdot \delta_1$. □

Pour $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$, soit $d\gamma_{M_P} = \delta \cdot dm_P$ ($\delta \in M_P^\natural$) la mesure de Haar à gauche sur $M_P^\natural$ associée à dm_P (c'est aussi une mesure de Haar à droite, cf. 2.5), et soit $d_l\gamma_P = d\gamma_{M_P} \cdot du_P$ la mesure produit sur $P^\natural = M_P^\natural \cdot U_P$. Alors $d_l\gamma_P$ est la mesure de Haar à gauche $\delta \cdot d_lp_P$ ($\delta \in P^\natural$) associée à d_lp_P. Pour toute ω–représentation lisse Σ de $M_P^\natural$, on pose

$$\Sigma(\phi) = \Sigma(\phi\, d\gamma_{M_P}) \quad (\phi \in C_c^\infty(M_P^\natural)),$$

et si Σ est admissible, on note Θ_Σ le caractère de Σ défini grâce à $d\gamma_{M_P}$ comme en 2.3.

Pour $P = G$, on pose $d\gamma = d\gamma_G$.

Soit $P^\natural$ un sous–espace parabolique de $G^\natural$. D'après la relation $(**)$ de 2.5, le module $\Delta_{P^\natural}$ de $P^\natural$ se factorise à travers $P^\natural/U_P$. Soit $\delta_{P^\natural} : P^\natural \to \mathbb{R}_{>0}$ l'application définie par

$$\delta_{P^\natural}(\gamma) = \Delta_{P^\natural}(\gamma)^{-1} \quad (\gamma \in P^\natural).$$

Elle aussi se factorise à travers $P^\natural/U_P$, et d'après le lemme de 2.5, on a

$$(*) \qquad \delta_{P^\natural}(p \cdot \gamma) = \delta_P(p)\delta_{P^\natural}(\gamma) \quad (p \in P,\ \gamma \in P^\natural),$$

où δ_P est le caractère Δ_P^{-1} de P. Pour $r \in \mathbb{R}$, on note $\delta_{P^\natural}^r : P^\natural \to \mathbb{R}_{>0}$ l'application définie par

$$\delta_{P^\natural}^r(\gamma) = \delta_{P^\natural}(\gamma)^r.$$

Remarque. — Puisque le groupe G est unimodulaire, d'après le lemme de 2.5, le module $\Delta_{G^\natural} : G^\natural \to \mathbb{R}_{>0}$ est constant. On verra en A.6 (Annexe A) que l'on peut choisir le point–base $\delta_1 \in G^\natural$ de telle manière qu'il existe une base de voisinages de 1 dans G formée de sous–groupes ouverts compacts de G normalisés par δ_1 (i.e. θ–stables). Cela implique en particulier (d'après le lemme 1 de 2.1) que $\Delta_{G^\natural} = 1$. On a donc $\delta_{G^\natural} = 1$. De la même manière, pour un sous–groupe parabolique $P^\natural$ de $G^\natural$, puisque le groupe quotient P/U_P est unimodulaire, le module $\Delta_{P^\natural/U_P}$ de $P^\natural/U_P$ est constant, et l'on a $\Delta_{P^\natural/U_P} = 1$. On a donc

$$\delta_{P^\natural}(\gamma) = \Delta_{P^\natural}(\gamma)^{-1}\Delta_{P^\natural/U_P}(\gamma\cdot U_P) \quad (\gamma \in P^\natural).$$

5.4. Éléments réguliers et quasi–réguliers de $G^\natural$. — On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}_F(\mathfrak{g}, F)$ son dual algébrique. Pour tout sous–groupe parabolique P de G, on pose $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$ et $\mathfrak{u}_P = \mathrm{Lie}(U_P)$.

Soit $\mathrm{Ad}_{G^\natural} : G^\natural \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ l'application $\gamma \mapsto \mathrm{Lie}(\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(\gamma)) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Rappelons que pour $g \in G$ et $\gamma \in G^\natural$, on a $\mathrm{Int}_{G^\natural}(g\cdot\gamma) = \mathrm{Int}_G(g)\circ\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$. On a donc

$$\mathrm{Ad}_{G^\natural}(g\cdot\gamma) = \mathrm{Ad}_G(g)\circ\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma) \quad (g\in G,\, \gamma\in G^\natural).$$

Soit $\mathrm{Ad}^*_{G^\natural} : G^\natural \to \mathrm{Aut}_F(\mathfrak{g}^*)$ l'application définie par

$$\langle X, \mathrm{Ad}^*_{G^\natural}(\gamma)(Y)\rangle = \langle \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)^{-1}(X), Y\rangle \quad (X\in\mathfrak{g},\, Y\in\mathfrak{g}^*,\, \gamma\in G^\natural).$$

Pour toute partie Ω de $\mathfrak{g}$, on note $\Omega^\perp$ le sous–espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$ défini par

$$\Omega^\perp = \{Y\in\mathfrak{g}^* : \langle X, Y\rangle = 0,\, \forall X\in\Omega\}.$$

Pour $\gamma \in G^\natural$, on pose

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_\gamma &= \ker(\mathrm{id}_\mathfrak{g} - \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)) \subset \mathfrak{g},\\ \mathfrak{g}(1-\gamma) &= \mathrm{Im}(\mathrm{id}_\mathfrak{g} - \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)) \subset \mathfrak{g},\\ \mathfrak{g}^*_\gamma &= \ker(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}^*} - \mathrm{Ad}^*_{G^\natural}(\gamma)^{-1}) \subset \mathfrak{g}^*.\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathfrak{g}^*_\gamma = \mathfrak{g}(1-\gamma)^\perp \quad (\gamma\in G^\natural).$$

Définition. — Comme dans [**BH1**, appendix, prop. A.2], un élément $\gamma\in G^\natural$ est dit *quasi–régulier* si pour tout sous–groupe parabolique P de G, on a $\mathfrak{g}(1-\gamma)+\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$; i.e. si l'on a $\mathfrak{g}^*_\gamma \cap \mathfrak{p}^\perp = \{0\}$.

Rappelons que l'on a posé $G^\natural_{\mathrm{reg}} = \{\gamma\in G^\natural : D_{G^\natural}(\gamma)\neq 0\}$. On note $G^\natural_{\mathrm{qr}}$ le sous–ensemble de $G^\natural$ formé des éléments quasi–réguliers. Puisque l'ensemble $G^\natural_{\mathrm{reg}}$ est ouvert dense dans $G^\natural$ pour la topologie de Zariski, il l'est à fortiori pour la topologie ϖ–adique. Quant à l'ensemble $G^\natural_{\mathrm{qr}}$, il n'est pas défini géométriquement, mais on verra plus loin (corollaire) qu'il possède lui aussi ces deux propriétés.

Proposition. — *On a l'inclusion $G^\natural_{\mathrm{reg}} \subset G^\natural_{\mathrm{qr}}$.*

Démonstration. — Soit $\gamma\in G^\natural_{\mathrm{reg}}$. D'après le théorème de 4.6, le tore $\mathbf{T} = Z_\mathbf{G}(\mathbf{H}^\circ_\gamma)$ est défini sur F. Posons $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ et $\mathfrak{t}^* = \mathrm{Hom}_F(\mathfrak{t}, F)$. Comme en 3.10, notons $\mathfrak{g}^1_\gamma$ le sous–espace caractéristique de $\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)$ associé à la valeur propre 1. L'application $\mathrm{id}_\mathfrak{g} - \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)$ induit, par passage au quotient, un automorphisme du F–espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^1_\gamma$. Puisque $\mathfrak{g}^1_\gamma \subset \mathfrak{t}$ (lemme 2 de 3.10), on a l'égalité $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}(1-\gamma)$. Pour $t\in T$, puisque

$$\mathfrak{t}\cap\mathrm{Ad}_G(t)(\mathfrak{g}(1-\gamma)) = \mathfrak{t}\cap\mathfrak{g}(1-\gamma),$$

on a l'égalité

$$\mathrm{Ad}_G(t)(\mathfrak{g}(1-\gamma)) = \mathfrak{g}(1-\gamma).$$

L'inclusion $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ induit donc, par passage aux quotients, une identification T–équivariante (pour l'action adjointe de T sur $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{g}$) :

$$\mathfrak{t}/(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}(1-\gamma)) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(1-\gamma).$$

D'où une identification T–équivariante (pour l'action coadjointe de T sur $\mathfrak{g}^*$ et sur $\mathfrak{t}^*$) :

$$\mathfrak{g}_\gamma^* \ (= \mathrm{Hom}_F(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(1-\gamma), F)) = \mathrm{Hom}_F(\mathfrak{t}/(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}(1-\gamma)), F) \subset \mathfrak{t}^*.$$

On en déduit que pour $Y \in \mathfrak{g}_\gamma^*$, le stabilisateur de Y dans G pour l'action coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$, contient T. Puisque T est dense dans $\mathbf{T}$ pour la topologie de Zariski, pour $Y \in \mathfrak{g}_\gamma^*$, le stabilisateur de Y dans $\mathbf{G}$ pour l'action coadjointe de $\mathbf{G}$ sur $\mathfrak{g}^* \otimes_F \overline{F}$, contient $\mathbf{T}$. Soit $\mathbf{B}$ un sous–groupe de Borel de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$, et soit $\mathbf{U} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{B})$. Pour $Y \in \mathfrak{g}_\gamma^*$, la $\mathbf{B}$–orbite de Y coïncide avec sa $\mathbf{U}$–orbite, laquelle est fermée dans $\mathfrak{g}^* \otimes_F \overline{F}$ pour la topologie de Zariski, d'après [**Bor**, ch. I, 4.10]. Comme la variété quotient $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ est complète, on en déduit que la $\mathbf{G}$–orbite de Y est fermée dans $\mathfrak{g}^* \otimes_F \overline{F}$. Par conséquent la G–orbite de Y est fermée dans $\mathfrak{g}^*$ *pour la topologie de Zariski.*

Soit maintenant P un sous–groupe parabolique de G. Choisissons une composante de Levi L de P, et notons P^- le sous–groupe parabolique de G opposé à P par rapport à L. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_{P^-} \oplus \mathfrak{p}$. Posons $\mathfrak{u}_{P^-}^* = \mathrm{Hom}_F(\mathfrak{u}_{P^-}, F)$. Alors on a l'identification P^-–équivariante (pour l'action coadjointe de P^- sur $\mathfrak{g}^*$ et sur $\mathfrak{u}_{P^-}^*$) :

$$\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{u}_{P^-}^*.$$

Or pour tout $Y \in \mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{u}_{P^-}^*$, la fermeture de la P^-–orbite de Y dans $\mathfrak{g}^*$ pour la topologie de Zariski, contient 0. D'où l'égalité $\mathfrak{g}_\gamma^* \cap \mathfrak{p}^\perp = \{0\}$. □

Corollaire. — *L'ensemble $G_{\mathrm{qr}}^\natural$ est ouvert dense dans $G^\natural$ pour la topologie ϖ–adique.*

Démonstration. — Puisque $G_{\mathrm{reg}}^\natural$ est dense dans $G^\natural$, l'ensemble $G_{\mathrm{qr}}^\natural$ l'est aussi.

On procède ensuite comme dans [**BH1**, appendix, prop. A.3]. Posons $\mathfrak{N} = \bigcup_P \mathfrak{p}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ où P parcourt l'ensemble des sous–groupes paraboliques de G. Pour $P \in \mathcal{P}_\circ$, on a $\mathfrak{p}^\perp \subset \mathfrak{p}_\circ^\perp$. Pour tout sous–groupe parbolique P de G, il existe un $g \in G$ tel que $g^{-1}Pg \in \mathcal{P}_\circ$, et puisque $G = K_\circ P_\circ$, on peut choisir g dans $K_\circ$. Or pour $P = kP'k^{-1}$ où $k \in K_\circ$ et $P' \in \mathcal{P}_\circ$, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} &= \mathrm{Ad}_G(k)(\mathfrak{p}'),\\ \mathfrak{p}^\perp &= \mathrm{Ad}_G^*(k)(\mathfrak{p}'^\perp) \subset \mathrm{Ad}_G^*(k)(\mathfrak{p}_\circ^\perp).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{k \in K_\circ} \mathrm{Ad}_G^*(k)(\mathfrak{p}_\circ^\perp).$$

Montrons que $\mathfrak{N}$ est fermé dans $\mathfrak{g}^*$. Soit une suite $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ dans $\mathfrak{N}$ qui converge vers un élément $X \in \mathfrak{g}^*$. Pour chaque entier $n \geq 1$, on écrit $X_n = \mathrm{Ad}_G^*(k_n)(Y_n)$ où $k_n \in K_\circ$ et $Y_n \in \mathfrak{p}_\circ^\perp$. Puisque $K_\circ$ est compact, quitte à remplacer $\{X_n\}$ par une sous–suite, on peut supposer que la suite $\{k_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ converge vers un élément $k \in K_\circ$. Alors $Y_n = \mathrm{Ad}_G^*(k_n^{-1})(X_n)$ tend vers $\mathrm{Ad}_G^*(k^{-1})(X)$ quand n tend vers $+\infty$. Mais puisque $\mathfrak{p}_\circ^\perp$ est fermé dans $\mathfrak{g}^*$, on a $\mathrm{Ad}_G^*(k^{-1})(X) \in \mathfrak{p}_\circ^\perp$ et $X \in \mathfrak{N}$. Donc $\mathfrak{N}$ est fermé dans $\mathfrak{g}^*$.

Choisissons une base $\{e_1, \ldots, e_d\}$ de $\mathfrak{g}^*$ sur F. Notons $\mathfrak{g}_0^*$ le sous–ensemble de $\mathfrak{g}^*$ formé des $X = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ ($x_i \in F$) tels que $\max\{|x_i|_F : i = 1, \ldots, d\} = 1$. Alors $\mathfrak{g}_0^*$ est compact dans $\mathfrak{g}^*$. Posons $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{g}_0^*$. Alors $\mathfrak{N} \smallsetminus \{0\} = F^\times \mathfrak{N}_0$, et $\mathfrak{N}_0$ est compact dans $\mathfrak{g}^*$.

Montrons que $G^\natural \smallsetminus G^\natural_{\mathrm{qr}}$ est fermé dans $G^\natural$. Soit $\{\gamma_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ une suite dans $G^\natural \smallsetminus G^\natural_{\mathrm{qr}}$ qui converge vers un élément $\gamma \in G^\natural$. Pour chaque entier $n \geq 1$, puisque $\mathfrak{g}^*_{\gamma_n} \cap \mathfrak{N} \neq \{0\}$ et $\mathfrak{N} \smallsetminus \{0\} = F^\times \mathfrak{N}_0$, il existe un élément $X_n \in \mathfrak{N}_0$ tel que $\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma_n)(X_n) = X_n$. Puisque $\mathfrak{N}_0$ est compact, quitte à remplacer la suite $\{\gamma_n\}$ par une sous–suite, on peut supposer que la suite $\{X_n\}$ converge vers un élément $X \in \mathfrak{N}_0$, et que la suite $\{k_n\}$ converge vers un élément $k \in K_\circ$. Alors $\mathrm{Ad}^*_{G^\natural}(\gamma_n)(X_n)$ tend vers $\mathrm{Ad}^*_{G^\natural}(\gamma)(X) = X$ quand n tend vers $+\infty$, et $\gamma \notin G^\natural_{\mathrm{qr}}$. Donc $G^\natural_{\mathrm{qr}}$ est ouvert dans $G^\natural$. □

Remarque. — Pour $G^\natural = G = \mathrm{GL}_n(F)$, d'après [**BH1**, appendix, A2], un élément $g \in G$ est dans G_{qr} si et seulement si son polynôme caractéristique $P_{\mathrm{car}}(g)$ est produit de polynômes irréductibles sur F deux–à–deux distincts, et il est dans G_{reg} si et seulement s'il est dans G_{qr} et si chaque facteur irréductible de $P_{\mathrm{car}}(g)$ est séparable. De manière équivalente, G_{reg} est l'ensemble des $g \in G$ tels que le polynôme $P_{\mathrm{car}}(g)$ a n racines distinctes dans $\overline{F}$. ■

5.5. L'application $\mathcal{N}_{\theta,g_0} : G \to G$ pour θ localement fini. — Dans ce n°, on suppose de plus que le $\mathbf{G}$–espace tordu $\mathbf{G}^\natural$ est localement fini (cf. 3.12) ; i.e. que $\theta \in \mathrm{Aut}^0_F(\mathbf{G})$.

Puisque le morphisme quotient $\mathbf{G}_{\mathrm{der}} \to \mathbf{G}_{\mathrm{ad}} = \mathbf{G}_{\mathrm{der}}/Z(\mathbf{G}_{\mathrm{der}})$ est une F–isogénie centrale, tout élément $\bar{g} \in \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}(F)$ définit un F–automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\bar{g})$ de $\mathbf{G}$: on choisit un $g \in \mathbf{G}_{\mathrm{der}}$ qui relève $\bar{g}$, et l'on pose $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\bar{g})(x) = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(g)(x)$ $(x \in \mathbf{G})$; l'élément $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\bar{g})(x)$ ne dépend pas du choix de g, et l'application $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\bar{g}) : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ ainsi définie est un F–automorphisme. Soit l_0 le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\theta^k = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\bar{g})$ pour un $\bar{g} \in \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}(F)$, et soit $\bar{g}_0 \in \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}(F)$ tel que $\theta^{l_0} = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\bar{g}_0)$. Puisque $\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}(F)$ quotienté par l'image du morphisme canonique $\mathbf{G}_{\mathrm{der}}(F) \to \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}(F)$ est de torsion, il existe un élément $g_0 \in \mathbf{G}_{\mathrm{der}}(F)$ et un entier $r \geq 1$ tels que $\bar{g}_0^r$ est l'image de g_0 par ce morphisme canonique. Puisque

$$\theta(g_0)\theta(x)\theta(g_0^{-1}) = \theta^{rl_0+1}(x) = g_0\theta(x)g_0^{-1} \quad (x \in G),$$

l'élément $g_0^{-1}\theta(g_0)$ appartient au centre de $\mathbf{G}_{\mathrm{der}}(F)$. Par suite, quitte à remplacer g_0 par g_0^k (et r par kr) pour un entier $k \geq 1$, on peut supposer que $\theta(g_0) = g_0$. Fixons un tel g_0 minimisant r, et posons $l = rl_0$. Notons que $\bar{g}_0$ et l sont déterminés de manière unique par θ, et que g_0 est déterminé de manière unique modulo $Z(G^\natural) \cap \mathbf{G}_{\mathrm{der}}(F)$. Soit

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\theta,g_0} : G \to G$$

l'application définie par

$$\mathcal{N}(g) = g\theta(g)\cdots\theta^{l-1}(g)g_0 \quad (g \in G).$$

Elle dépend du choix de g_0, mais l'application

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N}'_\theta : G \to G/Z(G^\natural)$$

obtenue en composant $\mathcal{N}$ avec la projection canonique $G \to G/Z(G^\natural)$, n'en dépend pas. Pour g, $x \in G$, on a

$$(*) \qquad \mathcal{N}(x^{-1}g\theta(x)) = x^{-1}\mathcal{N}(g)x.$$

Soit $\mathbf{G} \rtimes \langle\theta\rangle$ le produit semidirect (dans la catégorie des groupes) de $\mathbf{G}$ par le groupe abstrait engendré par θ, et soit $\mathbf{C}$ le sous–groupe cyclique de $\mathbf{G} \rtimes \langle\theta\rangle$ engendré par $g_0^{-1} \rtimes \theta^l$. On peut définir le groupe quotient

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{G} \rtimes \langle\theta\rangle/\mathbf{C}.$$

Notons $\tilde{\theta}$ l'image de $1 \rtimes \theta$ dans $\mathbf{G}^+$, et identifions $\mathbf{G}$ à l'image de $\mathbf{G} \rtimes 1$ dans $\mathbf{G}^+$. Posons $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}$ et $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}\tilde{\theta}^i$ $(i = 1, \ldots, l-1)$. Alors on a la décomposition en union union disjointe :

$$\mathbf{G}^+ = \coprod_{i=0}^{l-1} \mathbf{G}_i.$$

La multiplication et le passage à l'inverse dans $\mathbf{G}^+$ sont donnés par les relations suivantes, pour x, $y \in \mathbf{G}$ et i, $j \in \{0, \ldots, l-1\}$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\theta}^l = g_0,\\
&(x\tilde{\theta}^i)(y\tilde{\theta}^j) = x\theta^i(y)\tilde{\theta}^{i+j},\\
&(x\tilde{\theta}^i)^{-1} = \tilde{\theta}^{-i}x^{-1} = \theta^{-i}(x^{-1})\tilde{\theta}^{-i}.
\end{aligned}$$

Cela munit $\mathbf{G}^+$ d'une structure de groupe algébrique affine défini sur F, de composante neutre $\mathbf{G}$, tel que $\tilde{\theta}$ appartient au groupe $G^+ = \mathbf{G}(F)$ des points F–rationnels de $\mathbf{G}^+$. Les $\mathbf{G}_i$ pour $i = 0, \ldots, l-1$, sont les composantes connexes de $\mathbf{G}^+$. Elles sont toutes définies sur F, et pour $i = 0, \ldots, l-1$, l'ensemble $\mathbf{G}_i(F) = G\tilde{\theta}^i$ des points F–rationnels de $\mathbf{G}_i$ muni de la topologie ϖ–adique, est un G–espace tordu. Identifions $G^\natural$ à $\mathbf{G}_1(F)$ via l'application $g \cdot \delta_1 \mapsto g\tilde{\theta}$ $(g \in G)$. Alors pour $\gamma = g \cdot \delta_1 \in G^\natural$, l'inverse de γ dans G^+ est donné par

$$\gamma^{-1} = \tilde{\theta}^{-1}g^{-1} = g_0^{-1}\tilde{\theta}^{l-1}g^{-1} = g_0^{-1}\theta^{l-1}(g^{-1})\tilde{\theta}^{l-1},$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
&\gamma^l = \mathcal{N}(g),\\
&g^{-1}\gamma^l g = \theta(\gamma^l).
\end{aligned}$$

Remarque. — Supposons que la paire $(P_\circ, A_\circ)$ est θ–stable. Alors puisque $\theta^l = \mathrm{Int}_G(g_0)$, on a $g_0P_\circ g_0^{-1} = P_\circ$ et $g_0A_\circ g_0^{-1} = A_\circ$. En particulier, on a

$$g_0 \in N_G(A_\circ) \cap P_\circ = M_\circ. \qquad \blacksquare$$

5.6. La paire parabolique $(P_{[\gamma]}, A_{[\gamma]})$ de G associée à $\gamma \in G^\natural$. — Pour $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que la restriction de τ à $Z(G)$ est d'ordre fini, on note :

- $P_{[\tau]}$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $\{\tau^n(g) : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ est une partie bornée de G ;
- $U_{[\tau]}$ le sous–ensemble de $P_{[\tau]}$ formé des $g \in G$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \tau^n(g) = 1$;
- $P_{[\tau]}^-$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $\{\tau^{-n}(g) : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ est une partie bornée de G ;
- $U_{[\tau]}^-$ le sous–ensemble de $P_{[\tau]}^-$ formé des $g \in G$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \tau^{-n}(g) = 1$;
- $M_{[\tau]} = P_{[\tau]} \cap P_{[\tau]}^-$.

Ces cinq ensembles sont par définition des sous–groupes de G.

Si le $\mathbf{G}$–espace tordu $\mathbf{G}^\natural$ est localement fini, pour $\gamma \in G^\natural$ et $\tau = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$, on remplace τ par γ dans les notations ci-dessus ; i.e. on pose $P_{[\gamma]} = P_{[\tau]}$, $U_{[\gamma]} = U_{[\tau]}$, (etc.). Pour $\gamma = g \cdot \delta_1 \in G^\natural$, on a

$$\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)^{-1} = \mathrm{Int}_G(\theta^{-1}(g^{-1})) \circ \theta^{-1}.$$

Par suite, posant $\bar{\gamma} = \theta^{-1}(g^{-1})\theta^{-1} \in G\theta^{-1}$, on a (si le $\mathbf{G}$–espace tordu $\mathbf{G}^\natural$ est localement fini)

$$P_{[\gamma]}^- = P_{[\bar{\gamma}]}, \quad U_{[\gamma]}^- = U_{[\bar{\gamma}]}.$$

Remarque 1. — Supposons que le $\mathbf{G}$–espace tordu $\mathbf{G}^\natural$ est localement fini, et identifions $G^\natural$ à la composante connexe $G_1 = G\tilde{\theta}$ de $G^+ = \coprod_{i=0}^{l-1} G\tilde{\theta}^i$ comme en 5.5. Pour $\gamma \in G^+$, l'automorphisme $g \mapsto \gamma g \gamma^{-1}$ de G^+ induit par restriction un automorphisme de G, que l'on note $\mathrm{Int}_{G^+}(\gamma)$. Si $\gamma = g \cdot \delta_1 \in G^\natural$, cet automorphisme coïncide avec $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma) = \mathrm{Int}_G(g) \circ \theta$.

Pour $\gamma \in G^+$, la restriction de $\mathrm{Int}_{G^+}(\gamma)$ à $Z(G)$ est d'ordre fini, et l'on peut définir comme ci-dessus les sous–groupes $P_{[\gamma]}$, $U_{[\gamma]}$, $P^-_{[\gamma]}$, $U^-_{[\gamma]}$, $M_{[\gamma]}$ de G. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité $\mathrm{Int}_{G^+}(\gamma)^n = \mathrm{Int}_{G^+}(\gamma^n)$. On en déduit que pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on a :
– $P_{[\gamma]} = P_{[\gamma^n]}$,
– $U_{[\gamma]}$ et $U_{[\gamma^n]}$;
on a aussi :
– $P^-_{[\gamma]} = P_{[\gamma^{-n}]}$,
– $U^-_{[\gamma]} = U_{[\gamma^{-n}]}$,
– $M_{[\gamma]} = M_{[\gamma^n]} = M_{[\gamma^{-n}]}$.
En particulier, pour $g \in G$, on a $P_{[g\cdot\delta_1]} = P_{[\mathcal{N}(g)]}$, $U_{[g\cdot\delta_1]} = U_{[\mathcal{N}(g)]}$, (etc.). ■

Soit $\Phi_\circ$ l'ensemble des racines de $A_\circ$ dans G, et soit $\Delta_\circ \subset \Phi_\circ$ l'ensemble des racines simples associées à $P_\circ$. Soit v_F la valuation sur $\overline{F}$ normalisée par $v_F(F^\times) = \mathbb{Z}$. Notons :
– $A_\circ^-$ l'ensemble des $t \in A_\circ$ tels que $v_F(\alpha(t)) \geq 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta_\circ$;
– $A_\circ^{-,\bullet}$ l'ensemble des $t \in A_\circ$ tels que $v_F(\alpha(t)) > 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta_\circ$.
Pour tout $a \in A_\circ$, il existe un $g \in N_G(A_\circ)$ tel que $gag^{-1} \in A_\circ^-$, et si $a \in A_\circ^{-,\bullet}$, alors pour tout sous–groupe ouvert compact J de $U_{P_\circ}$, on a

$$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} a^i J a^{-i} = \{1\}, \quad \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} a^i J a^{-i} = U_{P_\circ}.$$

Proposition. — *Soit $\tau \in \mathrm{Aut}^0_F(\mathbf{G})$. Alors :*
– *$P_{[\tau]}$ est un sous–groupe parabolique de G, et l'on a $U_{[\tau]} = U_{P_{[\tau]}}$;*
– *$M_{[\tau]}$ est une composante de Levi de $P_{[\tau]}$;*
– *$P^-_{[\tau]}$ est le sous–groupe parabolique de G opposé à $P_{[\tau]}$ par rapport à $M_{[\tau]}$, et l'on a $U^-_{[\tau]} = U_{P^-_{[\tau]}}$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer $\mathbf{G}^\natural$ par $\mathbf{G}\tau$, on peut supposer que $\tau = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(\gamma)$ pour un $\gamma \in G^\natural$. Le $\mathbf{G}$–espace tordu $\mathbf{G}^\natural$ est alors localement fini. Identifions $G^\natural$ à la composante connexe $G_1 = G\tilde{\theta}$ de $G^+ = \coprod_{i=0}^{l-1} G\tilde{\theta}^i$, comme en 5.5. Soit $x = \gamma^l \in G$, et notons $x = x_\mathrm{s} x_\mathrm{u}$ la décomposition de Jordan de x (dans $\mathbf{G}$). Si $\mathrm{car}(F) = 0$, alors x_s et x_u appartiennent à G. Si $\mathrm{car}(F) = p > 1$, alors il existe un entier $m \geq 1$ tel que $(x_\mathrm{u})^{p^m} = 1$. Puisque $x^n = (x_\mathrm{s})^n (x_\mathrm{u})^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), quitte à remplacer x par x^n pour un entier $n \geq 1$, on peut supposer que x_s et x_u appartiennent à G. D'après le théorème de 3.9 et le théorème 2 de 3.7, le groupe $\mathbf{H} = \mathbf{G}^\circ_{x_\mathrm{s}}$ est réductif, et d'après [**Bor**, ch. III, 9.1] il est défini sur F. Le radical $\mathbf{S} = R(\mathbf{H})$ est un tore défini F. Soit $\mathbf{A}$ le tore F–déployé maximal de $\mathbf{S}$, et soit $\mathbf{S}'$ le tore F–anisotrope maximal de $\mathbf{S}$. Notons H, S, A, S' les groupes des points F–rationnels de $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}'$. Rappelons que x_s et x_u appartiennent à $\mathbf{H}$ (3.2, remarque (4)) ; en particulier x_s appartient à $Z(\mathbf{H})$. Puisque $Z(\mathbf{H})^\circ = R(\mathbf{H})$ et que le morphisme produit $\mathbf{A} \times \mathbf{S}' \to \mathbf{S}$ est une F–isogénie [**Bor**, ch. III, 8.15], quitte à remplacer une nouvelle fois x par x^n pour un entier $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on peut supposer que $x_\mathrm{s} \in S$ et $s = as'$ pour des éléments $a \in A$ et $s' \in S'$. On a donc $x = as'x_\mathrm{u}$ avec $ax_\mathrm{u} = x_\mathrm{u} a$ et $s'x_\mathrm{u} = x_\mathrm{u} s'$. Puisque S' est compact et que le sous–groupe de H engendré par x_u est borné, le sous–groupe de H engendré par $s'x_\mathrm{u}$ est lui aussi borné. On en déduit que les groupes $P_{[\gamma]} = P_{[x]}$ et $P_{[a]}$ coïncident. De même, on a $U_{[\gamma]} = U_{[x]} = U_{[a]}$, (etc.).

On procède ensuite comme dans [**Ca2**, §2]. Soit $y \in G$ tel que $yay^{-1} \in A_\circ^-$, et soit $I_{yay^{-1}}$ l'ensemble des racines $\alpha \in \Delta_\circ$ tels que $v_F(\alpha(yay^{-1})) = 0$. Soit $P \in \mathcal{P}_\circ$ le sous–groupe parabolique de G engendré par $P_\circ$ et les sous–groupes radiciels de G associés aux racines $-\alpha$ pour $\alpha \in I_{yay^{-1}}$. Posons $M = M_P$. Alors on a :
– $P_{[a]} = y^{-1} P y$ et $U_{[a]} = y^{-1} U_P y$;
– $P^-_{[a]} = y^{-1} P^- y$ et $U^-_{[a]} = y^{-1} U_{P^-} y$;

– $M_{[a]} = y^{-1}My$.
D'où la proposition. □

Notons que si $\mathbf{G}$ est un tore, disons $\mathbf{T}$, alors pour $\tau \in \mathrm{Aut}_F^0(\mathbf{T})$, on a :
– $P_{[\tau]} = P_{[\tau]}^- = M_{[\tau]} = T$,
– $U_{[\tau]} = U_{[\tau]}^- = \{1\}$.

On voudrait étendre les définitions des sous–groupes $P_{[\tau]}$, $U_{[\tau]}$, (etc.) de G au cas d'un F–automorphisme τ de $\mathbf{G}$ qui n'est pas localement fini, de manière à ce que la proposition reste vraie. Soit donc $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{G})$. Puisque $\tau_{\mathrm{der}} \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{G}_{\mathrm{der}}) = \mathrm{Aut}_F^0(\mathbf{G}_{\mathrm{der}})$, on peut définir comme plus haut les sous–groupes $P_{[\tau_{\mathrm{der}}]}$, $U_{[\tau_{\mathrm{der}}]}$, (etc.) de G_{der}. D'après la proposition, il existe un sous–groupe parabolique $\mathbf{P}'$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{der}}$ défini sur F et une composante de Levi $\mathbf{M}'$ de $\mathbf{P}'$ définie sur F tels que, notant $\mathbf{P}'^-$ le sous–groupe parabolique de $\mathbf{G}_{\mathrm{der}}$ opposé à $\mathbf{P}'$ par rapport à $\mathbf{M}'$, on a :
– $P_{[\tau_{\mathrm{der}}]} = \mathbf{P}'(F)$ et $U_{[\tau_{\mathrm{der}}]} = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P}')(F)$;
– $M_{[\tau_{\mathrm{der}}]} = \mathbf{M}'(F)$;
– $P_{[\tau_{\mathrm{der}}]}^- = \mathbf{P}'^-(F)$ et $U_{[\tau_{\mathrm{der}}]}^- = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P}'^-)(F)$.

Notons $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}^-$ les sous–groupes $R(\mathbf{G})\mathbf{P}'$, $R(\mathbf{G})\mathbf{M}'$, $R(\mathbf{G})\mathbf{P}'^-$ de $\mathbf{G}$. Ils sont définis sur F, $\mathbf{P}$ est un sous–groupe parabolique de $\mathbf{G}$, $\mathbf{M}$ est une composante de Levi de $\mathbf{P}$, et $\mathbf{P}^-$ est le sous–groupe parabolique de $\mathbf{G}$ opposé à $\mathbf{P}$ par rapport à $\mathbf{M}$. Les groupes $R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P}) = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P}')$ et $R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P}^-) = R_{\mathrm{u}}(\mathbf{P}'^-)$ sont eux aussi définis sur F ; on les note $\mathbf{U}$ et $\mathbf{U}^-$. On pose :
– $P_{[\tau]} = \mathbf{P}(F)$;
– $U_{[\tau]} = \mathbf{U}(F)$ $(= U_{[\tau_{\mathrm{der}}]})$;
– $P_{[\tau]}^- = \mathbf{P}^-(F)$;
– $U_{[\tau]}^- = \mathbf{U}^-(F)$ $(= U_{[\tau_{\mathrm{der}}]}^-)$;
– $M_{[\tau]} = \mathbf{M}(F)$ $(= P_{[\tau]} \cap P_{[\tau]}^-)$.

Si $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\mathrm{der}}$, ces définitions coïncident avec les précédentes, et pour $\mathbf{G}$ quelconque, on a :
– $P_{[\tau]} \cap \mathbf{G}_{\mathrm{der}}(F) = P_{[\tau_{\mathrm{der}}]}$;
– $P_{[\tau]}^- \cap \mathbf{G}_{\mathrm{der}}(F) = P_{[\tau_{\mathrm{der}}]}^-$;
– $M_{[\tau]} \cap \mathbf{G}_{\mathrm{der}}(F) = M_{[\tau_{\mathrm{der}}]}$.

On en déduit (pour $\mathbf{G}$ quelconque) que si $\tau \in \mathrm{Aut}_F^0(\mathbf{G})$, ces définitions coïncident avec les précédentes, c'est–à–dire que les notations sont cohérentes. De plus, par construction, la proposition reste vraie pour $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{G})$. En particulier si $\mathbf{G}$ est un tore, disons $\mathbf{T}$, alors pour $\tau \in \mathrm{Aut}_F(\mathbf{T})$, on a encore :
– $P_{[\tau]} = P_{[\tau]}^- = M_{[\tau]} = T$,
– $U_{[\tau]} = U_{[\tau]}^- = \{1\}$.

Remarque 2. — (On ne suppose plus que $\mathbf{G}$ est un tore.) Continuons avec les notations précédentes, et choisissons un tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{M}$ défini sur F, et une sous–extension finie E/F de F^{sep}/F déployant $\mathbf{T}$. Notons $P_{E,[\tau]}$, $U_{E,[\tau]}$, (etc.) les sous–groupes de $\mathbf{G}(E)$ définis comme ci-dessus en remplaçant F par E. D'après la relation $(*)$ de 3.5, le morphisme produit $\mathbf{T} \times \mathbf{G}_{\mathrm{der}} \to \mathbf{G}$ est séparable, et comme $\mathbf{T}' = \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_{\mathrm{der}}$ est un tore défini sur F et déployé sur E, d'après la remarque 2 de 4.1, on a l'égalité

$$\mathbf{G}(E) = \mathbf{T}(E)\mathbf{G}_{\mathrm{der}}(E).$$

On en déduit que

$$P_{E,[\tau]} = \mathbf{P}(E) = \mathbf{T}(E)\mathbf{P}'(E) = \mathbf{T}(E)P_{E,[\tau_{\mathrm{der}}]},$$

et

$$U_{E,[\tau]} = \mathbf{U}(E) = \mathbf{U}'(E) = U_{E,[\tau_{\mathrm{der}}]}.$$

On en déduit aussi que

$$P^-_{E,[\tau]} = \mathbf{T}(E)P_{E,[\tau_{\mathrm{der}}]}, \quad U^-_{E,[\tau]} = U^-_{E,[\tau_{\mathrm{der}}]},$$

et

$$M_{E,[\tau]} = \mathbf{M}(E) = \mathbf{T}(E)M_{E,[\tau_{\mathrm{der}}]}.$$

Enfin notons que par définition, on a $P_{[\tau]} = P_{E,[\tau]} \cap G$, $U_{[\tau]} = U_{E,[\tau]} \cap G$, (etc.).

Comme plus haut, pour $\gamma \in G^\natural$ et $\tau = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$, on remplace τ par γ dans les notations ci-dessus ; i.e. on pose $P_{[\gamma]} = P_{[\tau]}$, $U_{[\gamma]} = U_{[\tau]}$, (etc.). Pour $\gamma = g \cdot \delta_1 \in G^\natural$, avec la définition de $\bar{\gamma}$ donnée plus haut, on a encore (même si le $\mathbf{G}$–espace tordu $\mathbf{G}^\natural$ n'est pas localement fini)

$$P^-_{[\gamma]} = P_{[\bar{\gamma}]}, \quad U^-_{[\gamma]} = U_{[\bar{\gamma}]}.$$

Définition. — Pour $\gamma \in G^\natural$, on note $A_{[\gamma]}$ le tore déployé maximal du centre de $M_{[\gamma]}$. La paire $(P_{[\gamma]}, A_{[\gamma]})$ est appelée *la paire parabolique de G associée à γ*. Un élément $\gamma \in G^\natural$ tel que $P_{[\gamma]} \in \mathcal{P}_\circ$ et $A_{[\gamma]} = A_{P_{[\gamma]}}$ est dit *en position standard*.

Tout élément de $G^\natural$ est G–conjugué à un élément en position standard. En effet, pour $\gamma \in G^\natural$ et $x \in G$, on a

$$(P_{[x^{-1}\cdot\gamma\cdot x]}, A_{[x^{-1}\cdot\gamma\cdot x]}) = (x^{-1}P_{[\gamma]}x, x^{-1}A_{[\gamma]}x),$$

et fixé $\gamma \in G^\natural$, on peut choisir $x \in G$ tel que $P_{[x^{-1}\cdot\gamma x]} \supset P_\circ$ et $A_{[x^{-1}\cdot\gamma x]} \subset A_\circ$; autrement dit tel que $P = P_{[x^{-1}\cdot\gamma x]} \in \mathcal{P}_\circ$ et $A_P = A_{[x^{-1}\cdot\gamma\cdot x]}$.

Pour $\gamma \in G^\natural$, les sous–groupes paraboliques $P_{[\gamma]}$ et $P^-_{[\gamma]}$ de G sont $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$–stables (par définition). Les sous–groupes $M_{[\gamma]}$ et $A_{[\gamma]}$ de G sont donc eux aussi $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$–stables. En particulier, $P^\natural_{[\gamma]} = P_{[\gamma]} \cdot \gamma$ et $P^{-,\natural}_{[\gamma]} = P^-_{[\gamma]} \cdot \gamma$ sont deux sous–espaces paraboliques de $G^\natural$, et $M^\natural_{[\gamma]} = M_{[\gamma]} \cdot \gamma$ est une composante de Levi de $P^\natural_{[\gamma]}$ (resp. de $P^{-,\natural}_{[\gamma]}$), qui vérifie

$$M^\natural_{[\gamma]} = P^\natural_{[\gamma]} \cap P^{-,\natural}_{[\gamma]}.$$

Notons que γ est en position standard si et seulement si $P_{[\gamma]} \in \mathcal{P}^{(\natural)}_\circ$ et $M_{[\gamma]} = M_{P_{[\gamma]}}$, i.e. si et seulement si $P^\natural_{[\gamma]} \in \mathcal{P}^\natural_\circ$ et $M^\natural_{[\gamma]} = M^\natural_{P_{[\gamma]}}$.

Remarque 3. — Soit $\gamma = g \cdot \delta_1 \in G^\natural$. Si $P_{[\gamma]}$ est θ–stable, alors on a $g \in N_G(P_{[\gamma]}) = P_{[\gamma]}$. Si $P_{[\gamma]}$ et $P^-_{[\gamma]}$ sont θ–stables, alors on a $g \in P_{[\gamma]} \cap P^-_{[\gamma]} = M_{[\gamma]}$. Réciproquement, si $g \in P_{[\gamma]}$ (resp. si $g \in M_{[\gamma]}$), alors $P_{[\gamma]}$ est θ–stable (resp. $P_{[\gamma]}$ et $P^-_{[\gamma]}$ sont θ–stables).

Supposons de plus que la paire $(P_\circ, A_\circ)$ est θ–stable. Si γ est en position standard, alors g appartient à $M_{[\gamma]}$. En effet, supposons que $P = P_{[\gamma]}$ appartient à $\mathcal{P}_\circ$ et que $A_{[\gamma]} = A_P$. Puisque $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)(P) = P$, on a $\theta(P) = g^{-1}Pg \in \mathcal{P}_\circ$ d'où $g \in N_G(P) = P$, et puisque $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)(M_{[\gamma]}) = M_{[\gamma]} = M_P$, on a $\theta(M_P) = g^{-1}M_P g$. Or d'après le lemme de 5.1, on a $\theta(A_P) = A_P$ d'où $\theta(M_P) = M_P$. Donc $g \in N_G(M_P) \cap P = M_P$. ∎

Remarque 4. — Soit $P \in \mathcal{P}^{(\natural)}_\circ$, et soit $\gamma \in M^\natural_P$ tel que $P_{[\gamma]} = P$ et $A_{[\gamma]} = A_P$. Posons $M = M_P, U = U_P, U^- = U^-_P$, et $\tau = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$. D'après **[D]**, il existe une base $\{K_i : i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ de voisinages de 1 dans G formée de sous–groupes ouverts compacts K_i de G tels que, posant $K^-_i = K_i \cap U^-$, $K^0_i = K_i \cap M$ et $K^+_i = K_i \cap U$, on a

- $K_i = K^-_i K^0_i K^+_i$,
- $\tau^{-1}(K^-_i) \subset K^-_i$, $\tau(K^0_i) = K^0_i$ et $\tau(K^+_i) \subset K^+_i$).

Rappelons la construction. Fixons un système de coordonnées locales α au voisinage de 1 dans G, i.e. un $\mathfrak{o}_F$–réseau Λ dans $\mathfrak{g}$ et une application $\alpha : \Lambda \to G$ qui soit un isomorphisme de variétés ϖ–adiques sur un voisinage de 1 dans G. On peut choisir α tel que, posant $\Lambda^- = \Lambda \cap \mathfrak{u}_{P^-}$, $\Lambda^0 = \Lambda \cap \mathfrak{m}_P$ et $\Lambda^+ = \Lambda \cap \mathfrak{u}_P$, on ait :

- $\alpha(0) = 1$ et $\mathrm{d}\alpha_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$;
- $\Lambda = \Lambda^- \oplus \Lambda^0 \oplus \Lambda^+$;
- $\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)^{-1}(\Lambda^-) \subset \Lambda^-$, $\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)(\Lambda^0) = \Lambda^0$ et $\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)(\Lambda^+) \subset \Lambda^+$.

Alors il existe un entier $i_0 \geq 0$ tel que, posant $K_i = \alpha(\varpi^{i+i_0}\Lambda)$ pour $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, l'ensemble $\{K_i : i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ vérifie les conditions demandées. ■

5.7. Le principe de submersion d'Harish–Chandra. — Soit $P \in \mathcal{P}_\circ$. Pour $\gamma \in G^\natural$, considérons l'application

$$\psi_{P,\gamma} : G \times P \to G^\natural,\ (g,p) \mapsto g^{-1} \cdot \gamma \cdot gp \quad (g \in G,\ p \in P).$$

Pour $G^\natural = G$ et γ régulier (c'est–à–dire semisimple régulier, cf. la proposition de 3.10), le résultat suivant est dû à Harish–Chandra [**HC3**, theo. 1].

Proposition. — *Pour $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, l'application $\psi_{P,\gamma}$ est partout submersive.*

Démonstration. — Pour $x \in G$ et $y \in P$, on a

$$\psi_{P,\gamma}(xg, py) = \psi_{P,x^{-1}\cdot\gamma\cdot x}(g,p) \cdot y$$

Il suffit donc de montrer que $\psi_{P,\gamma}$ est submersive en $(g,p) = (1,1)$. En calculant $\mathrm{d}(\psi_{P,\gamma})_{1,1}$, on obtient que $\Psi_{P,\gamma}$ est submersive en $(1,1)$ si et seulement si on a l'égalité

$$\mathfrak{g}(1-\gamma) + \mathfrak{p}' = \mathfrak{g};$$

où l'on a posé $\mathfrak{p}' = \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)(\mathfrak{p})$. D'où la proposition. □

On peut donc appliquer ici le *principe de submersion d'Harish–Chandra* : d'après [**HC1**, theo. 11, p.49], il existe une unique application linéaire

$$C^\infty_{\mathrm{c}}(G \times P) \to C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural),\ \alpha \mapsto f_{\alpha,\gamma}$$

telle que pour toute fonction $\Phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural)$, on a l'égalité

$$\iint_{G\times P} \alpha(g,p)\Phi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot gp)dgd_lp = \int_{G^\natural} f_{\alpha,\gamma}(\gamma')\Phi(\gamma')d\gamma'.$$

D'ailleurs, l'égalité ci-dessus reste vraie pour toute fonction Φ localement intégrable sur $G^\natural$ (par rapport à une mesure de Haar sur $G^\natural$).

Lemme. — *Soit une fonction $\alpha \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G \times P)$. L'application*

$$G^\natural_{\mathrm{qr}} \to C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural),\ \gamma \mapsto f_{\alpha,\gamma}$$

est localement constante.

Démonstration. — L'application

$$G^\natural_{\mathrm{qr}} \times G \times P \to G^\natural_{\mathrm{qr}} \times G^\natural,\ (\gamma, g, p) \mapsto (\gamma, \psi_{P,\gamma}(g,p))$$

est partout submersive. Par suite il existe une unique application linéaire

$$C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural_{\mathrm{qr}} \times G \times P) \to C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural_{\mathrm{qr}} \times G^\natural),\ \beta \mapsto f_\beta$$

telle que pour toute fonction $\Psi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural_{\mathrm{qr}} \times G^\natural)$, on a l'égalité

$$\iiint_{G^\natural_{\mathrm{qr}}\times G\times P} \beta(\gamma,g,p)\Psi(\gamma, g^{-1}\cdot\gamma\cdot gp)d\gamma dg d_l p = \iint_{G^\natural_{\mathrm{qr}}\times G^\natural} f_\beta(\gamma,\gamma')\Psi(\gamma,\gamma')d\gamma d\gamma'.$$

Soit $\Psi = \lambda\otimes\Phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural_{\mathrm{qr}}\times G^\natural)$ pour des fonctions $\lambda\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural_{\mathrm{qr}})$ et $\Phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural)$. Alors posant

$$\Lambda_\beta(\Phi,\gamma) = \iint_{G\times P}\beta(\gamma,g,p)\Phi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot gp)dg d_l p \quad (\gamma\in G^\natural_{\mathrm{qr}}),$$

on a l'égalité

$$\int_{G^\natural_{\mathrm{qr}}}\lambda(\gamma)\Lambda_\beta(\Phi,\gamma)d\gamma = \int_{G^\natural_{\mathrm{qr}}}\lambda(\gamma)\left\{\int_{G^\natural} f_\beta(\gamma,\gamma')\Phi(\gamma')d\gamma'\right\}d\gamma.$$

Puisque l'égalité ci-dessus est vraie pour toute fonction $\lambda\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural_{\mathrm{qr}})$, on en déduit que pour toute fonction $\Phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural)$ et tout $\gamma\in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, on a l'égalité

$$\Lambda_\beta(\Phi,\gamma) = \int_{G^\natural} f_\beta(\gamma,\gamma')\Phi(\gamma')d\gamma'.$$

Fixons un élément $\gamma_0\in G^\natural_{\mathrm{qr}}$ et une fonction $\mu\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural_{\mathrm{qr}})$ telle que $\mu(\gamma_0)=1$. Soit aussi une fonction $\alpha\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G\times P)$. Posons $\beta=\mu\otimes\alpha\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural_{\mathrm{qr}}\times G\times P)$. Soit Ω un voisinage de γ_0 dans $G^\natural_{\mathrm{qr}}$ tel que $\mu|_\Omega = 1$. Alors pour $(\gamma,g,p)\in\Omega\times G\times P$ et $\Phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural)$, on a $\beta(\gamma,g,p)=\alpha(g,p)$; par conséquent

$$\begin{aligned}\Lambda_\beta(\Phi,\gamma) &= \iint_{G\times P}\alpha(g,p)\Phi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot gp)dg d_l p\\ &= \int_{G^\natural} f_{\alpha,\gamma}(\gamma')\Phi(\gamma')d\gamma'\end{aligned}$$

et

$$\int_{G^\natural} f_{\alpha,\gamma}(\gamma')\Phi(\gamma')d\gamma' = \int_{G^\natural} f_\beta(\gamma,\gamma')\Phi(\gamma')d\gamma'.$$

L'égalité ci–dessus étant vraie pour tout $\gamma\in\Omega$ et toute fonction $\Phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural)$, on en déduit l'égalité

$$f_{\alpha,\gamma}(\gamma') = f_\beta(\gamma,\gamma') \quad (\gamma\in\Omega,\ \gamma'\in G^\natural).$$

D'où le lemme, puisque $f_\beta\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural_{\mathrm{qr}}\times G^\natural)$. $\square$

5.8. Les opérateurs T_γ pour $\gamma\in G^\natural$ quasi–régulier. — Soit (Π,V) une ω–représentation admissible de $G^\natural$. Posons $\pi=\Pi^\circ$. Notons $\mathrm{End}_0(V)$ l'image canonique de $V\otimes_{\mathbb{C}}\check{V}$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, où $\check{V}$ désigne l'espace de la contragrédiente $\check{\pi}$ de π. De manière équivalente, $\mathrm{End}_0(V)$ est l'espace des applications linéaires $u: V\rightarrow V$ telles que les deux applications $G\rightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $g\mapsto\pi(g)\circ u$ et $G\rightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $g\mapsto u\circ\pi(g)$, sont localement constantes.

Soit $M_\circ^+$ l'ensemble des $m\in M_\circ$ tels que pour toute racine α de $A_\circ$ dans $U_\circ$, on a $\langle H_{M_\circ}(m),\alpha\rangle\leq 0$, où

$$H_{M_\circ}: M_\circ\rightarrow \mathrm{X}_*(A_\circ)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$$

est l'application d'Harish–Chandra, définie comme suit : pour $m\in M$ et $\lambda\in\mathrm{X}^*(A_\circ)$, il existe un entier $d\geq 1$ tel que $\lambda^d=\mu|_{A_\circ}$ pour un (unique) caractère rationnel $\mu\in\mathrm{X}_F^*(M_\circ)$, et l'on pose $\langle H_M(m),\lambda\rangle = -\frac{1}{d}v_F(\mu(m))$. On a la *décomposition de Cartan* [**BT1**, prop. 4.4.3] :

$$G = K_\circ M_\circ^+ K_\circ. \tag{$*$}$$

Remarque. — Posons $A_\circ^+ = \{t^{-1} : t\in A_\circ^-\}$ (cf. 5.6). L'ensemble $A_\circ\cap M_\circ^+$ est contenu dans $A_\circ^+$, et si $\mathbf{G}$ est semisimple, alors on a $A_\circ\cap M_\circ^+ = A_\circ^+$. ■

Fixons un sous–groupe ouvert compact K de G. Pour $\gamma \in G^\natural$, notons $\mathrm{T}_\gamma = \mathrm{T}^K_{\Pi,\gamma}$ le $\mathbb{C}$–endomorphisme de V défini par

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_\gamma &= \mathrm{vol}(K,dk)^{-1}\int_K \omega(k^{-1})\Pi(k^{-1}\cdot\gamma\cdot k)dk\\ &= \mathrm{vol}(K,dk)^{-1}\int_K \pi(k^{-1})\circ\Pi(\gamma)\circ\pi(k)dk.\end{aligned}$$

Pour $G^\natural = G$, $\omega = 1$, γ régulier et $K = K_\circ$, le théorème suivant est dû à Harish–Chandra [**HC3**, theo. 2]. L'hypothèse $K = K_\circ$ a ensuite été supprimée par Rader et Silberger [**RS**].

Théorème. — *Supposons que π est de type fini (i.e. de longueur finie). Pour $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, l'opérateur T_γ appartient à l'espace $\mathrm{End}_0(V)$, et l'application $G^\natural_{\mathrm{qr}} \to \mathrm{End}_0(V)$, $\gamma \mapsto \mathrm{T}_\gamma$ est localement constante.*

Démonstration. — Notons que si le théorème est vrai, alors pour tout sous–groupe compact K' de G contenant K, le théorème reste vrai si l'on remplace T_γ par $T^{K'}_{\Pi,\gamma}$. Quitte à remplacer K par un groupe plus petit, on peut donc supposer que K est un sous–groupe distingué de $K_\circ$ tel que $\omega|_K = 1$.

Notons $K_1 = K$, $K_2, \ldots, K_n$ les classes de $K_\circ/K$ ($K_i = x_iK_\circ = K_\circ x_i$ pour un $x_i \in K_\circ$), et pour $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, posons $c = \mathrm{vol}(K,dg)$ et

$$\mathrm{T}_{\gamma,i} = c^{-1}\int_{K_i}\omega(g^{-1})\Pi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot g)dg. \quad (i = 1,\ldots,n).$$

Pour $i = 1,\ldots,n$ et $x \in K_i$, on a donc

$$\mathrm{T}_{\gamma,i} = \omega(x^{-1})T_{x^{-1}\cdot\gamma\cdot x} = \pi(x^{-1})\circ T_\gamma\circ\pi(x).$$

Puisque π est de type fini, il existe un sous–groupe ouvert distingué K' de $K_\circ$ tel que V est engendré sur G par le sous–espace $V^{K'} = \{v \in V : \pi(k')(v) = v,\ \forall k' \in K'\}$.

Puisque le groupe $M_\circ/A_\circ$ est compact, il existe une partie compacte Ω de $M_\circ$ telle que $M^+_\circ \subset \Omega(A_\circ \cap M^+_\circ)$. On en déduit qu'il existe un sous–groupe ouvert compact $J_{P_\circ}$ de $P_\circ$ tel que pour tout $m \in M^+_\circ$, on a l'inclusion $m^{-1}J_{P_\circ}m \subset K'$. Pour $i = 1,\ldots,n$, notons $\alpha_i \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G\times P_\circ)$ la fonction définie par

$$\alpha_i(g,p) = \begin{cases} c^{-1}\omega(g^{-1}) & \text{si } (g,p) \in K_i\times J_{P_\circ}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

D'après 5.7, pour $i = 1,\ldots,n$ et $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, il existe une unique fonction $f_{\alpha_i,\gamma} \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural)$ telle que pour toute fonction Φ localement intégrable sur $G^\natural$, on a l'égalité

$$c^{-1}\iint_{K_i\times J_{P_\circ}}\omega(g^{-1})\Phi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot gp)dgd_lp = \int_{G^\natural} f_{\alpha_i,\gamma}(\gamma')\Phi(\gamma')d\gamma'.$$

Puisque pour $(v,\check{v}) \in V\times\check{V}$, l'application

$$G^\natural \to \mathbb{C},\ \gamma' \mapsto \langle\Pi(\gamma')(v),\check{v}\rangle$$

est localement constante (donc localement intégrable), pour $i = 1,\ldots,n$ et $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{J_{P_\circ}}\mathrm{T}_{\gamma,i}\circ\pi(p)d_lp &= c^{-1}\iint_{K_i\times J_{P_\circ}}\omega(g^{-1})\Pi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot gp)dgd_lp\\ &= \Pi(f_{\alpha_i,\gamma}).\end{aligned}$$

Fixons un élément $\gamma_0 \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$. Pour chaque i, la fonction $G^\natural_{\mathrm{qr}} \to C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural)$, $\gamma \mapsto f_{\alpha_i,\gamma}$ est localement constante (lemme de 5.7). Par suite il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de γ_0 dans $G^\natural_{\mathrm{qr}}$ et un sous–groupe ouvert K'' de K distingué dans $K_\circ$, tels que pour $i = 1, \ldots, n$ et $\gamma \in \mathcal{V}$, la fonction $f_{\alpha_i,\gamma}$ est bi–invariante (i.e. à gauche et à droite) par K''.

Puisque K' est distingué dans $K_\circ$, d'après la décomposition de Cartan $(*)$, V est engendré (sur $\mathbb{C}$) par les vecteurs $\pi(km)(v)$ pour $k \in K_\circ$, $m \in M_\circ^+$ et $v \in V^{K'}$. Fixons de tels k, m, v, et notons $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'indice tel que $k \in K_i$. Soit $\gamma \in \mathcal{V}$. On a

$$\mathrm{T}_\gamma \circ \pi(km)(v) = \pi(k) \circ \mathrm{T}_{\gamma,i} \circ \pi(m)(v),$$

et l'on a aussi

$$\begin{aligned}\Pi(f_{\alpha_i,\gamma}) \circ \pi(m)(v) &= \int_{J_{P_\circ}} \mathrm{T}_{\gamma,i} \circ \pi(p) \circ \pi(m)(v) d_l p \\ &= \int_{J_{P_\circ}} \mathrm{T}_{\gamma,i} \circ \pi(m) \circ \pi(m^{-1}pm)(v) d_l p \\ &= \mathrm{T}_{\gamma,i} \circ \pi(m) \circ \left\{ \int_{J_{P_\circ}} \pi(m^{-1}pm)(v) d_l p \right\} \\ &= \mathrm{vol}(J_{P_\circ}, d_l p) \mathrm{T}_{\gamma,i} \circ \pi(m)(v).\end{aligned}$$

Soit maintenant $e_{K''} \in C_\mathrm{c}^\infty(G)$ la fonction caractéristique de K'' divisée par $\mathrm{vol}(K'', dg)$. D'après les calculs ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}&\pi(e_{K''}) \circ \mathrm{T}_\gamma \circ \pi(km)(v) \\ &= \mathrm{vol}(J_{P_\circ}, d_l p)^{-1} \pi(e_{K''}) \circ \pi(k) \circ \Pi(f_{\alpha_i,\gamma}) \circ \pi(m)(v).\end{aligned}$$

Or $K_\circ$ normalise K'', par conséquent les opérateurs $\pi(e_{K''})$ et $\pi(k)$ commutent. Comme la fonction $f_{\alpha_i,\gamma}$ est K''–invariante à gauche, on a $\pi(e_{K''}) \circ \Pi(f_{\alpha_i,\gamma}) = \Pi(f_{\alpha_i,\gamma})$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\pi(e_{K''}) \circ \mathrm{T}_\gamma \circ \pi(km)(v) &= \mathrm{vol}(J_{P_\circ}, d_l p)^{-1} \pi(k) \circ \Pi(f_{\alpha_i,\gamma}) \circ \pi(m)(v) \\ &= \pi(k) \circ \mathrm{T}_{\gamma,i} \circ \pi(m)(v) \\ &= \mathrm{T}_\gamma \circ \pi(km)(v).\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tous k, m, v et tout γ, on a montré que

$$\pi(e_{K''}) \circ \mathrm{T}_\gamma = \mathrm{T}_\gamma \quad (\gamma \in \mathcal{V}).$$

Pour $y \in G^\natural$, d'après la définition de T_y, on a $\pi(e_{K''}) \circ \mathrm{T}_y = \mathrm{T}_y \circ \pi(e_{K''})$. Pour $\gamma \in \mathcal{V}$, on a donc $\pi(e_{K''}) \circ \mathrm{T}_\gamma = \mathrm{T}_\gamma \circ \pi(e_{K''}) = \mathrm{T}_\gamma$, d'où $\mathrm{T}_\gamma \in \mathrm{End}_0(V)$. D'autre part, puisque K'' est distingué dans K, on a aussi

$$\mathrm{T}_{x\cdot\gamma\cdot y} = \mathrm{T}_\gamma \quad (x,\, y \in K'',\, \gamma \in \mathcal{V}).$$

L'application $G^\natural_\mathrm{qr} \to \mathrm{End}_0(V)$, $\gamma \mapsto \mathrm{T}_\gamma$ est donc bien localement constante. □

Puisque π est admissible, les éléments de $\mathrm{End}_0(V)$ sont des opérateurs de rang fini sur V. Pour $g \in G^\natural_\mathrm{qr}$, on peut donc définir la trace de T_γ, que l'on note $\mathrm{tr}(\mathrm{T}_\gamma)$.

Corollaire. — *(On suppose toujours π admissible et de longueur finie.) Le caractère Θ_Π est représenté sur $G^\natural_\mathrm{qr}$ par la fonction localement constante*

$$\gamma \mapsto \Theta_\Pi(\gamma) = \mathrm{tr}(\mathrm{T}_\gamma).$$

En d'autres termes, pour toute fonction $\phi \in C_\mathrm{c}^\infty(G^\natural_\mathrm{qr})$, on a l'égalité

$$\Theta_\Pi(\phi) = \int_{G^\natural_\mathrm{qr}} \phi(\gamma) \Theta_\Pi(\gamma) d\gamma.$$

Démonstration. — Pour $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G^{\natural})$, notons $\phi_0 \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G^{\natural})$ la fonction définie par

$$\phi_0(\gamma) = \mathrm{vol}(K, dk)^{-1} \int_K \omega(k^{-1})\phi(k \cdot \gamma \cdot k^{-1})dk.$$

Pour $x \in G$, on a (relation $(*)$ de 2.6)

$$\Theta_\Pi({}^x\phi) = \omega(x^{-1})\Theta_\Pi(\phi),$$

par conséquent $\Theta_\Pi(\phi) = \Theta_\Pi(\phi_0)$.

Soit une fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G^{\natural}_{\mathrm{qr}})$. Alors $\phi_0 \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G^{\natural}_{\mathrm{qr}})$, et d'après le théorème, on a

$$\int_{G^\natural} \phi(\gamma)\mathrm{tr}(\mathrm{T}_\gamma)d\gamma = \mathrm{tr}\left(\int_{G^\natural} \phi(\gamma)\mathrm{T}_\gamma d\gamma\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{G^\natural} \phi(\gamma)\mathrm{tr}(T_\gamma)d\gamma &= \mathrm{tr}\left(\int_G \left\{\int_K \phi(\gamma)\omega(k^{-1})\Pi(k^{-1}\cdot\gamma\cdot k)dk\right\} d\gamma\right)\\ &= \mathrm{tr}\left(\int_G \phi_0(\gamma)\Pi(\gamma)d\gamma\right)\\ &= \Theta_\Pi(\phi_0).\end{aligned}$$

D'où le corollaire. □

Puisque pour $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G^{\natural})$ et $x \in G$, on a $\Theta_\Pi({}^x\phi) = \omega(x^{-1})\Theta_\Pi(\phi)$, on a l'égalité

$$(**) \qquad \Theta_\Pi(x^{-1}\cdot\gamma\cdot x) = \omega(x)\Theta_\Pi(\gamma) \quad (\gamma \in G^{\natural}_{\mathrm{qr}},\ x \in G).$$

5.9. Induction parabolique et caractères. — Pour $P \in \mathcal{P}_\circ$, on note

$$\iota_P^G : \mathfrak{R}(M_P) \to \mathfrak{R}(G)$$

le foncteur *induction parabolique normalisée*. On rappelle la définition : pour toute représentation lisse (σ, W) de M_P, on note encore σ la représentation lisse $\sigma\otimes 1 : M_P \ltimes U_P \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(W)$ de P, et l'on pose $\iota_P^G(\sigma) = \mathrm{ind}_P^G(\delta_P^{1/2}\sigma)$ où (rappel) δ_P est le caractère Δ_P^{-1} de P.

Lemme. — *Pour tout sous–groupe parabolique P de G, on a $\omega|_{U_P} = 1$.*

Démonstration. — Soit P un sous–groupe parabolique de G. Soit $x \in G$ tel que $x^{-1}Px \supset P_\circ$. Alors $U_{x^{-1}Px} = x^{-1}U_Px \subset U_{P_\circ}$, et comme $\omega(x^{-1}ux) = \omega(u)$ $(u \in U_P)$, il suffit de montrer que $\omega|_{U_{P_\circ}} = 1$. Soit J un sous–groupe ouvert compact de G tel que $\omega|_J = 1$, et soit $a \in A_\circ^{-,\bullet}$. Puisque $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} a^i(J \cap U_{P_\circ})a^{-i} = U_{P_\circ}$ et $\omega|_{J\cap U_{P_\circ}} = 1$, on en déduit que $\omega|_{U_{P_\circ}} = 1$. □

Pour $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$, on définit comme suit un foncteur

$${}^\omega\iota_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(G^\natural, \omega).$$

Soit (Σ, W) une ω–représentation lisse de $M_P^\natural$. Posons $\sigma = \Sigma^\circ$. Pour $\gamma \in P^\natural$, on écrit $\gamma = \delta\cdot u$ avec $\delta \in M_P^\natural$ et $u \in U_P$ (rappelons que l'écriture est unique), et l'on pose $\Sigma(\gamma) = \Sigma(\delta)$. Pour $\gamma \in P^\natural$ et $p,\ p' \in P$, en écrivant $p = mu$ et $p' = m'u'$ avec $m,\ m' \in M_P$ et $u,\ u' \in U_P$, on a

$$p\cdot\gamma\cdot p' = (m\cdot\gamma\cdot m')\cdot \mathrm{Int}_{P^\natural}(\gamma\cdot m')^{-1}(u)u'$$

avec $\mathrm{Int}_{P^\natural}(\gamma\cdot m')^{-1}(u)u' \in U_P$, d'où (en utilisant le lemme)

$$\Sigma(p\cdot\gamma\cdot p') = \omega(m')\sigma(m)\circ\Sigma(\gamma)\circ\sigma(m') = \omega(p')\sigma(p)\circ\Sigma(\gamma)\circ\sigma(p').$$

En d'autres termes, l'application $\gamma \mapsto \Sigma(\gamma)$ est une ω–représentation lisse de $P^\natural$. D'après la relation $(*)$ de 5.3 et le lemme de 2.1, $\delta_{P^\natural}^{1/2}\Sigma$ est encore une ω–représentation de $P^\natural$, telle que $(\delta_{P^\natural}^{1/2}\Sigma)^\circ = \delta_P^{1/2}\sigma$. On peut donc poser

$$ {}^\omega\iota_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma) = {}^\omega\mathrm{ind}_{P^\natural}^{G^\natural}(\delta_{P^\natural}^{1/2}\Sigma). $$

Par construction, les foncteurs ${}^\omega\iota_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural,\omega) \to \mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$ et $\iota_P^G : \mathfrak{R}(M_P) \to \mathfrak{R}(G)$ commutent aux foncteurs d'oubli : pour toute ω–représentation lisse Σ de $M_P^\natural$, on a

$$ {}^\omega\iota_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)^\circ = \iota_P^G(\Sigma^\circ). $$

Pour $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$, on note

$$ C_c^\infty(G^\natural) \to C_c^\infty(M_P^\natural),\ \phi \mapsto {}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ} $$

l'application linéaire définie par

$$ {}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}(\delta) = \delta_{P^\natural}^{1/2}(\delta)\iint_{U_P\times K_\circ}\omega(k)\phi(k^{-1}\cdot\delta\cdot uk)dudk \quad (\delta \in M_P^\natural). $$

Le théorème suivant est une simple reformulation du corollaire de 2.8. Il généralise la formule bien connue de Van Dijk [**VD, Cl1**].

Théorème. — *Soit $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$, Σ une ω–représentation admissible de $M_P^\natural$, et $\Pi = {}^\omega\iota_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)$. Alors pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$, on a la formule de descente*

$$ \Theta_\Pi(\phi) = \Theta_\Sigma({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}). $$

Démonstration. — Notons Σ' la ω–représentation $\delta_{P^\natural}^{1/2}(\Sigma\otimes 1)$ de $P^\natural = M_P^\natural\cdot U_P$, et soit $\Theta_{\Sigma'}$ le caractère de Σ' défini grâce à la mesure de Haar à gauche $d_l\gamma_P$ sur $P^\natural$ comme en 2.6. Soit une fonction $\phi \in C_c^\infty(G)$. Puisque $G = PK_\circ = K_\circ P$ et

$$ \mathrm{vol}(P\cap K_\circ, \Delta_P^{-1}(p)d_lp) = \mathrm{vol}(P\cap K_\circ, d_lp) = 1, $$

d'après le corollaire de 2.8, on a

$$ \Theta_\Pi(\phi) = \Theta_{\Sigma'}(\phi_{K_\circ}|_{P^\natural}), $$

où

$$ \phi_{K_0}(\gamma) = \int_{K_\circ}\omega(k)\phi(k^{-1}\cdot\gamma\cdot k)dk \quad (\gamma \in G^\natural). $$

Or posant $d\delta = d\gamma_{M_P}$, on a

$$ \begin{aligned} \Sigma'(\phi_{K_\circ}|_{P^\natural}d_l\gamma_P) &= \iint_{M_P^\natural\times U_P}\phi_{K_\circ}(\delta\cdot u)\Sigma'(\delta\cdot u)d\delta du \\ &= \int_{M_P^\natural}\delta_{P^\natural}^{1/2}(\delta)\left\{\int_{U_P}\phi_{K_\circ}(\delta\cdot u)du\right\}\Sigma(\delta)d\delta \\ &= \int_{M_P^\natural}{}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}(\delta)\Sigma(\delta)d\delta. \end{aligned} $$

D'où le théorème. □

Remarque. — Si de plus la représentation Σ° est de type fini (i.e. de longueur finie, puisqu'elle est admissible), alors Π° l'est aussi, et grâce à la formule d'intégration de H.Weyl établie au ch. 5, on peut écrire la formule de descente du théorème en termes de fonctions caractères (voir 7.3, corollaire 3). ■

5.10. Restriction de Jacquet et caractères. — Pour $P \in \mathcal{P}_\circ$, on note

$$r_G^P : \mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(M_P)$$

le foncteur *restriction de Jacquet normalisée*. On rappelle la définition : pour toute représentation lisse (π, V) de G, on note $V(U_P)$ le sous–espace de V engendré par les vecteurs $\pi(u)(v) - v$ pour $u \in U_P$ et $v \in V$, et l'on pose $V_P = V/V(U_P)$. L'espace $V(U_P)$ est P–stable, et l'on note (π_P, V_P) la représentation (lisse) de M_P déduite de π par restriction et passage aux quotients. Enfin on pose $r_G^P(\pi) = \delta_P^{-1/2} \otimes \pi_P$.

Pour $P \in P_\circ^\natural$, on définit comme suit un foncteur

$$^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega).$$

Soit (Π, V) une ω–représentation lisse de $G^\natural$. Posons $\pi = \Pi^\circ$. Puisque $\omega|_{U_P} = 1$ (lemme de 5.9), pour $\gamma \in P^\natural$, $u \in U_P$ et $v \in V$, on a

$$\Pi(\gamma)(\pi(u)(v) - v) = \Pi(\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)(u))(\Pi(\gamma)(v)) - \Pi(\gamma)(v) \in V(U_P).$$

Par restriction et passage au quotient, Π induit donc une application $\Pi_{P^\natural} : P^\natural \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_P)$, qui se factorise à travers $M_P^\natural$. Pour $\delta \in M_P^\natural$, m, $m' \in M_P$ et $v \in V$, on a

$$\begin{aligned}\Pi_{P^\natural}(m \cdot \delta \cdot m')(v + V(U_P)) &= \Pi(m \cdot \delta \cdot m')(v) + V(U_P)\\ &= \omega(m')\pi(m) \circ \Pi(\delta) \circ \pi(m')(v) + V(U_P)\\ &= \omega(m')\pi_P(m) \circ \Pi_{P^\natural}(\delta) \circ \pi_P(m')(v + V(U_P)).\end{aligned}$$

En d'autres termes, $\Pi_{P^\natural}$ est une ω–représentation lisse de $M_P^\natural$. D'après la relation $(*)$ de 5.3 et le lemme de 2.1, $\delta_{P^\natural}^{-1/2}\Pi_{P^\natural}$ est encore une ω–représentation lisse de $M_P^\natural$, telle que $(\delta_{P^\natural}^{-1/2}\Pi_{P^\natural})^\circ = \delta_P^{-1/2}\pi_P$. On peut donc poser

$$^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural}(\Pi) = \delta_{P^\natural}^{-1/2}\Pi_{P^\natural}.$$

Par construction, les foncteurs $^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega)$ et $r_G^P : \mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(M_P)$ commutent aux foncteurs d'oubli : pour toute ω–représentation lisse Σ de $M_P^\natural$, on a

$$^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural}(\Pi)^\circ = r_G^P(\Pi^\circ).$$

Remarque. — Pour $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$, le foncteur $^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural}$ est un adjoint à gauche du foncteur $^\omega \iota_{P^\natural}^{G^\natural}$: pour toute ω–représentation lisse Σ de $M_P^\natural$ et toute ω–représentation lisse Π de $G^\natural$, on a un $\mathbb{C}$–isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{G^\natural}(\Pi, {}^\omega \iota_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)) \simeq \mathrm{Hom}_{M_P^\natural}({}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural}(\Pi), \Sigma),$$

fonctoriel en Π et en Σ. Précisément, posant $\pi = \Pi^\circ$ et $\sigma = \Sigma^\circ$, il se déduit par restriction du $\mathbb{C}$–isomorphisme canonique (fonctoriel en π et en σ)

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \iota_P^G(\sigma)) \simeq \mathrm{Hom}_{M_P}(r_G^P(\pi), \sigma) \qquad \blacksquare$$

Notons $\mathfrak{F}$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, et τ le $\mathbb{C}$–automorphisme de $\mathfrak{F}$ défini par $\tau(f)(n) = f(n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$. Une fonction $f \in \mathfrak{F}$ est dite *τ–finie* si les $\tau^i(f)$, $i \in \mathbb{Z}$, engendrent un sous–espace vectoriel de $\mathfrak{F}$ de dimension finie. Une fonction $f \in \mathfrak{F}$ est τ–finie si et seulement s'il existe un polynôme $P(t) \in \mathbb{C}[t]$, $P(0) \neq 0$, tel que $P(\tau)(f) = 0$; où $P(\tau)$ est le $\mathbb{C}$–endomorphisme de $\mathfrak{F}$ donné par $P(\tau) = \sum_{i=0}^k a_i \tau^i$ si $P(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$. Les fonctions τ–finies $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ forment un sous–espace vectoriel de $\mathfrak{F}$.

Lemme 1. — *Soit f_1, $f_2 \in \mathfrak{F}$ deux fonctions τ–finies. Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$, on a $f_1(n) = f_2(n)$. Alors $f_1 = f_2$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer f_i par $\tau^{n_0}(f_i)$, on peut supposer $n_0 = 0$. Il s'agit de montrer qu'une fonction τ–finie $f \in \mathfrak{F}$ telle que $f(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$, ne peut être que la fonction nulle. Supposons par l'absurde que $f \neq 0$, et soit j le plus petit entier > 1 tel que $f(-j) \neq 0$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons $f_k = \tau^{-j-k}(f)$. On a $f_k(k) = f(-j) \neq 0$ et $f_k(k+n) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$. Les fonctions f_k sont linéairement indépendantes, ce qui contredit le fait que f est τ–finie. Donc $f = 0$. □

Exemple. — Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$ pour un $\mathbb{C}$–espace vectoriel X de dimension finie, et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}^\times$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$) les valeurs propres non nulles de u. Pour $i = 1, \ldots, r$, notons m_i la multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique de u. Alors la fonction $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(n) = \mathrm{tr}(u^n) = m_1\lambda_1^n + \cdots + m_r\lambda_r^n,$$

se prolonge de manière unique en une fonction τ–finie $f \in \mathfrak{F}$. ■

Pour $G^\natural = G$, $\omega = 1$ et g régulier, le résultat suivant est dû à Casselman [**Ca2**, theo. 5.2].

Théorème. — *Soit $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$, Π une ω–représentation admissible de $G^\natural$, et $\Sigma = {}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural}(\Pi)$. On suppose que Π° est de type fini (i.e. de longueur finie). Pour tout $\gamma \in M_P^\natural \cap G_{\mathrm{qr}}^\natural$ tel que $P_{[\gamma]} = P$ et $A_{[\gamma]} = A_P$, on a l'égalité*

$$\delta_{P^\natural}^{-1/2}(\gamma)\Theta_\Pi(\gamma) = \Theta_\Sigma(\gamma).$$

Démonstration. — Posons $M = M_P$ et $M^\natural = M_P^\natural$. On a clairement l'inclusion

$$M^\natural \cap G_{\mathrm{qr}}^\natural \subset M_{\mathrm{qr}}^\natural,$$

par conséquent l'énoncé a un sens. Posons $\pi = \Pi^\circ$.

Soit un élément $\gamma \in M^\natural \cap G_{\mathrm{qr}}^\natural$ tel que $P_{[\gamma]} = P$ et $A_{[\gamma]} = A_P$. Posons $\tau = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)$. D'après la remarque 4 de 5.6, il existe un sous–groupe ouvert compact K de G tel que, posant $K^- = K \cap U_{P^-}$, $K^0 = K \cap M$, $K^+ = K \cap U_P$, on a :
- $K = K^-K^0K^+ = K^+K^0K^-$;
- $\tau^{-1}(K^-) \subset K^-$, $\tau(K^0) = K^0$, $\tau(K^+) \subset K^+$;
- $\omega|_K = 1$;
- $K \cdot \gamma \cdot K \subset G_{\mathrm{qr}}^\natural$;
- $\Theta_\Pi|_{K\cdot\gamma\cdot K} = \Theta_\Pi(\gamma)$;
- $\Theta_{\Pi_{P^\natural}}|_{K^0\cdot\gamma} = \Theta_{\Pi_{P^\natural}}(\gamma)$.

Pour tout sous–groupe compact J de G, on note e_J la mesure de Haar normalisée sur J (i.e. telle que $\mathrm{vol}(J, e_J) = 1$), identifiée à une distribution à support compact sur G. Puisque $K = K^-K^0K^+ = K^+K^0K^-$, on a les égalités (dans l'algèbre des distributions à support compact sur G)

$$e_K = e_{K^-} * e_{K^0} * e_{K^+} = e_{K^+} * e_{K^0} * e_{K^-}.$$

Pour $\delta \in G^\natural$, on note ϕ_δ^K la fonction caractéristique de $K \cdot \delta \cdot K \subset G^\natural$ divisé par $\mathrm{vol}(K \cdot \delta \cdot K, d\gamma_G)$, où (rappel) $d\gamma_G = \delta_1 \cdot dg$ (cf. 2.5). On a donc

$$\Pi(\phi_\delta^K) = \pi(e_K) \circ \Pi(\delta) \circ \pi(e_K).$$

Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, puisque $\tau(K^0K^+) \subset K^0K^+$ et $\tau^{-n}(K^-) \subset K^-$, on a

$$\begin{aligned}
&\Pi(\phi_\gamma^K) \circ \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma)^n \circ \pi(e_K)\\
&\quad = \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma) \circ \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma)^n \circ \pi(e_K)\\
&\quad = \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma) \circ \pi(e_{K^0K^+}) \circ \pi(e_{K^-}) \circ \Pi(\gamma)^n \circ \pi(e_K)\\
&\quad = \pi(e_K) \circ \pi(e_{\tau(K^0K^+)}) \circ \Pi(\gamma) \circ \Pi(\gamma)^n \circ \pi(e_{\tau^{-n}(e_{K^-})}) \circ \pi(e_K)\\
&\quad = \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma)^{n+1} \circ \pi(e_K).
\end{aligned}$$

Par récurrence sur n, on a donc

$$\Pi(\phi_\gamma^K)^n = \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma)^n \circ \pi(e_K) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}).$$

Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, notons $V_\gamma^{K,n}$ le sous–espace

$$\Pi(\phi_\gamma^K)^n(V^K) = \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma)^n(V^K)$$

de $V^K = \pi(e_K)(V)$. Pour m, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on a donc

$$V_\gamma^{K,m+n} = \Pi(\phi_\gamma^K)^m(V_\gamma^{K,n}) \subset \Pi(\phi_\gamma^K)^m(V^K) = V_\gamma^{K,m}.$$

Rappelons que l'espace $V(U_P)$ coïncide avec l'ensemble des $v \in V$ tels que

$$\int_{\Omega_v} \pi(u)(v)du = 0$$

pour un sous–groupe ouvert compact Ω_v de U_P. Puisque la représentation π est admissible, l'espace $V(U_P) \cap V^K$ est de dimension finie, et il existe un sous–groupe ouvert compact Ω de U_P tel que pour tout $v \in V(U_P) \cap V^K$, on a $\int_\Omega \pi(u)(v)du = 0$. Quitte à remplacer Ω par un sous–groupe plus gros, on peut supposer que $K^+ \subset \Omega$. Choisissons un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\tau^{n_0}(\Omega) \subset K^+$.

Notons $p : V \to V_P$ la projection canonique, et posons

$$V_P^{K^0} = \pi_P(e_{K^0})(V_P) = r_G^P(e_{K^0})(V_P).$$

Lemme 2. — *Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$.*

(1) *Pour $v \in V^K$, on a*

$$\Pi(\phi_\gamma^K)^m(v) = \pi(e_{K^+}) \circ \Pi(\gamma)^m(v), \quad p \circ \Pi(\phi_\gamma^K)^m(v) = \Pi_{P^\natural}(\gamma)^m \circ p(v).$$

(2) *On a $\Pi(\phi_\gamma^{K,n})(V(U_P) \cap V^K) = 0$.*

(3) *L'application $p : V \to V_P$ induit par restriction un $\mathbb{C}$–isomorphisme $V_\gamma^{K,n} \to V_P^{K^0}$.*

(4) *On a $\Pi(\phi_\gamma^K)^m(V_\gamma^{K,n}) = V_\gamma^{K,n}$.*

Démonstration. — Montrons (1). Soit $v \in V^K$. Puisque $\tau^{-m}(K^0K^-) \subset K$, on a

$$\begin{aligned}
\Pi(\phi_\gamma^K)^m(v) &= \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma)^m(v)\\
&= \pi(e_{K^+}) \circ \pi(e_{K^0K^-}) \circ \Pi(\gamma)^m(v)\\
&= \pi(e_{K^+}) \circ \Pi(\gamma)^m \circ \pi(e_{\tau^{-m}(K^0K^-)})(v)\\
&= \pi(e_{K^+}) \circ \Pi(\gamma)^m(v).
\end{aligned}$$

Or $\pi(e_{K^+}) \circ \Pi(\gamma)^m(v)$ est contenu dans $\Pi(\gamma)^m(v) + V(U_P)$, d'où le point (1).

Montrons (2). Soit $v \in V(U_P) \cap V^K$. D'après (1), on a

$$\begin{aligned}\Pi(\phi_\gamma^{K,n})(v) &= \pi(e_{K^+}) \circ \Pi(\gamma)^n(v)\\ &= \mathrm{vol}(K^+, du)^{-1}\int_{K^+}\pi(u)\circ\Pi(\gamma)^n(v)du\\ &= \mathrm{vol}(K^+, du)^{-1}\Pi(\gamma)^n\circ\int_{K^+}\pi(\tau^{-n}(u))(v)du\\ &= 0\end{aligned}$$

car $\tau^{-n}(K^+) \supset \tau^{-n_0}(K^+) \supset \Omega$.

Montrons (3). Fixons un entier $n \geq n_0$ et posons $W = V_\gamma^{K,n}$. Montrons la surjectivité. Soit $\bar{v} \in V_P^{K^0}$. Puisque $\mathrm{Int}_{M^\natural}(\gamma)^{-n}(K^0) = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)^{-n}(K^0) = K^0$, on a $\Pi_{P^\natural}(\gamma)^{-n}(\bar{v}) \in V_P^{K^0}$. D'après le « premier lemme de Jacquet » [13], la projection canonique $p : V \to V_P$ induit une application surjective $V^K \to V_P^{K^0}$. Choisissons un $v' \in V^K$ tel que $p(v') = \Pi_{P^\natural}(\gamma)^{-n}(\bar{v})$, et posons $v = \Pi(f_\gamma^K)^n(v') \in W$. D'après (1), on a $p(v) = \Pi_{P^\natural}(\gamma)^n \circ p(v') = \bar{v}$. Montrons l'injectivité. Soit $w \in V(U_P) \cap W$. Écrivons $w = \pi(e_K) \circ \Pi(\gamma)^n(v'')$ avec $v'' \in V^K$. D'après (1), on a $w = \pi(e_{K^+}) \circ \Pi(\gamma)^n(v'')$, et puisque $w \in V(U_P) \cap V^K$ et $K^+ \subset \Omega$, on a

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega \pi(u)(w)du\\ &= \int_\Omega \pi(u)\pi(e_{K^+})\circ\Pi(\gamma)^n(v'')du\\ &= \int_\Omega \pi(u)\circ\Pi(\gamma)^n(v'')du\\ &= \Pi(\gamma)^n\circ\int_\Omega \pi(\tau^{-n}(u))(v'')du.\end{aligned}$$

Donc $v'' \in V(U_P)$. D'après (2), on a donc $w = 0$.

Montrons (4). On a

$$\Pi(\phi_\gamma^K)^m(V_\gamma^{K,n}) = V_\gamma^{K,n+m} \subset V_\gamma^{K,n}.$$

Or d'après (3), on a $\dim_{\mathbb{C}}(V_\gamma^{K,n+m}) = \dim_{\mathbb{C}}(V_P^{K^0}) = \dim_{\mathbb{C}}(V_\gamma^{K,n})$, par conséquent l'inclusion ci-dessus est une égalité. □

Posons $W = V_\gamma^{K,n_0}$ et $\overline{W} = V_P^{K^0}$, et pour $\delta \in M^\natural$, notons $\phi_\delta^{K^0}$ la fonction caractéristique de $K^0 \cdot \gamma \cdot K^0$ divisée par $\mathrm{vol}(K^0 \cdot \delta \cdot K^0, d\gamma_M)$. D'après le lemme 2, pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$, on a

$$\mathrm{tr}(\Pi(\phi_\gamma^K)^n) = \mathrm{tr}(\Pi(\phi_\gamma^K)^n|_W) = \mathrm{tr}(\Pi_{P^\natural}(\gamma)^n|_{\overline{W}}) = \mathrm{tr}(\Pi_{P^\natural}(\phi_\gamma^{K^0})^n).$$

Grâce au lemme 1, on en déduit que

$$\Theta_\Pi(\gamma) = \Theta_\Pi(\phi_\gamma^K) = \Theta_{\Pi_{P^\natural}}(\phi_\gamma^{K^0}) = \Theta_{\Pi_{P^\natural}}(\gamma).$$

D'où le théorème puisque $\Theta_{\Pi_{P^\natural}}(\gamma) = \delta_{P^\natural}^{1/2}(\gamma)\Theta_\Sigma(\gamma)$. □

Pour $G^\natural = G$, $\omega = 1$ et g régulier, le corollaire suivant est dû à Deligne [**D**].

Corollaire. — *Soit Π une ω–représentation admissible de $G^\natural$. On suppose que Π° est de type fini, et que pour tout $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural \smallsetminus \{G^\natural\}$, on a ${}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural}(\Pi) = 0$. Alors pour tout $\gamma \in G_{\mathrm{qr}}^\natural$ tel que $P_{[\gamma]} \neq G$, on a $\Theta_\Pi(\gamma) = 0$.*

---

13. Dans le cas admissible, le résultat est prouvé dans [**Ca1**, theo. 3.3.3] — cf. aussi [**Be**, 3.2]. Il a ensuite été étendu au cas non admissible par Bernstein (loc. cit).

Démonstration. — Soit $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$. Choisissons $x \in G$ tel que $\gamma' = x^{-1}\cdot\gamma\cdot x$ est en position standard. Puisque $P_{[\gamma]} = xP_{[\gamma']}x^{-1}$, si $P_{[\gamma]} \neq G$, alors $P = P_{[\gamma']} \neq G$ et d'après le lemme 2, on a $\Theta_\Pi(\gamma') = 0$. On conclut grâce à la relation $(**)$ de 5.8. □

5.11. Commentaire. — On peut bien sûr traduire ces résultats dans le langage classique des caractères (θ,ω)–tordus de G. Un élément $g \in G$ est dit :

– *θ–régulier* si l'élément $g\theta \in G^\natural = G\theta$ est régulier ;

– *θ–quasi–régulier* si $g\theta$ est quasi–régulier.

Notons $G_{\theta-\mathrm{reg}}$ et $G_{\theta-\mathrm{qr}}$ les sous–ensembles de G formés des éléments qui sont respectivement θ–réguliers et θ–quasi–réguliers. D'après la proposition de 5.4, on a l'inclusion

$$G_{\theta-\mathrm{reg}} \subset G_{\theta-\mathrm{qr}};$$

et ces deux ensembles sont ouverts denses dans G (corollaire de 5.4).

Soit (π,V) une représentation admissible de G telle que $\omega\pi \simeq \pi^\theta$, et soit $A \in \mathrm{Isom}_G(\omega\pi,\pi^\theta)$. On suppose que π est de type fini. Soit K un sous–groupe ouvert compact de G. Pour $g \in G$, on note $\mathrm{T}_g = \mathrm{T}^K_{(\pi,A),g} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_g &= \mathrm{vol}(K,dk)^{-1}\int_K \omega(k^{-1})\pi(k^{-1}g\theta(k))\circ Adk\\ &= \mathrm{vol}(K,dk)^{-1}\int_K \pi(k^{-1})\circ\pi(g)\circ A\circ\pi(k)dk.\end{aligned}$$

D'après le théorème de 5.8, pour $g \in G_{\theta-\mathrm{qr}}$, on a $\mathrm{T}_g \in \mathrm{End}_0(V)$, et l'application

$$G_{\theta-\mathrm{qr}} \to \mathrm{End}_0(V),\ g \mapsto \mathrm{T}_g$$

est localement constante. D'après le corollaire de 5.8, le caractère tordu Θ^A_π est représenté sur $G_{\theta-\mathrm{qr}}$ par la fonction localement constante $g \mapsto \Theta^A_\pi(g) = \mathrm{tr}(\mathrm{T}_g)$. En d'autres termes, pour toute fonction $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G_{\theta-\mathrm{qr}})$, on a l'égalité

$$\Theta^A_\pi(f) = \int_{G_{\theta-\mathrm{qr}}} f(g)\Theta^A_\pi(g)dg.$$

Puisque pour $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G)$ et $x \in G$ on a $\Theta^A_\pi({}^{x,\theta}f) = \omega(x^{-1})\Theta^A_\pi(f)$ (relation $(**)$ de 2.6), on a l'égalité

$$\Theta^A_\pi(x^{-1}g\theta(x)) = \omega(x)\Theta^A_\pi(g)\quad(g \in G_{\theta-\mathrm{qr}},\ x \in G).$$

La traduction des numéros 5.9 et 5.10 est laissée au lecteur.

6. Séries discrètes et représentations cuspidales

Continuons avec les notations du ch. 5.

6.1. Caractères des représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable. — Notons $Z = Z(G)$ le centre de G, et fixons une mesure de Haar dz sur Z. Soit $d\bar{g} = \frac{dg}{dz}$ la mesure quotient sur le groupe G/Z.

Soit (Π,V) une ω–représentation lisse de $G^\natural$. Posons $\pi = \Pi^\circ$ et $A = \Pi(\delta_1) \in \mathrm{Isom}_G(\omega\pi,\pi^\theta)$. Pour $(v,\check{v}) \in V\times\check{V}$, on note $\pi_{v,\check{v}} : G \to \mathbb{C}$ le coefficient de π défini par

$$\pi_{v,\check{v}}(g) = \langle\pi(g)(v),\check{v}\rangle\quad(g \in G),$$

et $\Pi_{v,\check{v}}$ le coefficient de Π défini par

$$\Pi_{v,\check{v}}(\gamma) = \langle\Pi(\gamma)(v),\check{v}\rangle\quad(\gamma \in G^\natural).$$

Pour $\gamma = g\cdot\delta_1$, on a donc $\Pi_{v,\check{v}}(\gamma) = \pi_{A(v),\check{v}}(g)$. Soit $\mathcal{A}(\Pi)$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel engendré par les coefficients de Π. Pour $\varphi\in\mathcal{A}(\Pi)$, puisque $\Pi(z\cdot\gamma\cdot z) = \omega(z)\Pi(\gamma)$, on a

$$(*)\qquad \varphi(z^{-1}\cdot\gamma\cdot z) = \omega(z)\varphi(g)\quad (z\in Z,\, \gamma\in G^\natural).$$

Soit aussi $\mathcal{A}(\pi)$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel engendré par les coefficients de π, et soit

$$\mathcal{A}(\Pi)\to\mathcal{A}(\pi),\ \varphi\mapsto\varphi^\circ$$

l'application linéaire définie par $\Pi^\circ_{v,\check{v}} = \pi_{v,\check{v}}$ pour tout $(v,\check{v})\in V\times\check{V}$.

On suppose π irréductible, et *essentiellement de carré intégrable modulo* Z ; i.e. il existe un caractère ψ de G tel que les coefficients de $\pi\otimes\psi$ sont de carré intégrable modulo Z. Soit $d(\pi) = d(\pi, d\bar{g}) > 0$ le degré formel de π défini par $d\bar{g}$: pour tous $(v,\check{v})$, $(v',\check{v}')\in V\times\check{V}$, on a

$$\int_{G/Z}\pi_{v,\check{v}}(g)\pi_{v',\check{v}'}(g^{-1})d\bar{g} = d(\pi)^{-1}\langle v,\check{v}'\rangle\langle v',\check{v}\rangle.$$

Fixons un sous–groupe ouvert compact K de G. Pour $\varphi\in\mathcal{A}(\Pi)$ et $\gamma\in G^\natural$, on note $\Theta^K_{\varphi,\gamma}: G\to\mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\Theta^K_{\varphi,\gamma}(g) = \mathrm{vol}(K,dk)^{-1}\int_K\omega(k^{-1})\varphi(g^{-1}k^{-1}\cdot\gamma\cdot kg)dk.$$

D'après $(*)$, on a l'égalité

$$(**)\qquad \Theta^K_{\varphi,\gamma}(zg) = \omega(z)\Theta^K_{\varphi,\gamma}(g)\quad (z\in Z,\, g\in G).$$

Pour $\theta = \mathrm{id}_G$, $\omega = 1$ et $\gamma\in G$ (semisimple) régulier, le théorème suivant est dû à Rader et Silberger [**RS**, theo. 2] (cf. aussi [**BH1**, theo. A.12]).

Théorème. — *Pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{A}(\Pi)$, on a*

$$\varphi^\circ(1)\Theta_\Pi(\gamma) = d(\pi)\int_{G/Z}\omega(g^{-1})\Theta^K_{\varphi,\gamma}(g)d\bar{g}\quad (\gamma\in G^\natural_{\mathrm{qr}});$$

l'intégrale converge absolument et uniformément[14] *sur les parties compactes de $G^\natural_{\mathrm{qr}}$. Si de plus π est cuspidale, alors pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{A}(\Pi)$ et toute partie compacte C de $G^\natural_{\mathrm{qr}}$, il existe une partie $\Omega = \Omega(\varphi, C)$ de G compacte modulo Z telle que*

$$\Theta^K_{\varphi,\gamma}(g) = 0\quad (\gamma\in C,\, g\in G\smallsetminus\Omega).$$

Démonstration. — Puisque pour $\gamma\in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, on a

$$\Theta_\Pi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot g) = \omega(g)\Theta_\Pi(\gamma)\quad (g\in G),$$

le théorème ne dépend pas du choix de K. On peut donc, comme dans la démonstration du théorème de 5.8, supposer que K est un sous–groupe ouvert distingué de $K_\circ$ tel que $\omega|_K = 1$. D'autre part, il suffit de traiter les fonctions $\varphi\in\mathcal{A}(\Pi)$ qui sont des coefficients de Π. Soit donc $\varphi = \Pi_{v,\check{v}}$ pour un couple $(v,\check{v})\in V\times\check{V}$. Soit aussi une partie compacte C de $G^\natural_{\mathrm{qr}}$.

Pour $\gamma\in G^\natural$, reprenons l'opérateur $\mathrm{T}_\gamma = \mathrm{T}^K_{\Pi,\gamma}\in\mathrm{End}_0(V)$ défini en 5.8. D'après la démonstration du théorème de loc. cit., pour chaque $\gamma\in C$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\gamma)$ de γ dans $G^\natural_{\mathrm{qr}}$ et un sous–groupe ouvert distingué K_γ de K, tels que

$$\mathrm{T}_{x\cdot\delta\cdot y} = \mathrm{T}_\gamma\quad (\delta\in\mathcal{V}(\gamma);\, x,\, y\in K_\gamma).$$

14. Précisément, pour toute partie compacte C de $G^\natural_{\mathrm{qr}}$, les fonctions $\omega^{-1}\Theta^K_{\varphi,\gamma}$ sur G/Z $(\gamma\in C)$ vérifient le "critère de M–test" de Weierstrass.

On peut recouvrir C par un nombre fini de tels voisinages $\mathcal{V}_\gamma$. On en déduit l'existence d'un sous–groupe ouvert compact J de G tel que

$$\mathrm{T}_{x\cdot\gamma\cdot y} = \mathrm{T}_\gamma \quad (\gamma \in C;\, x,\, y \in J).$$

Par conséquent, pour $\gamma \in C$, l'opérateur T_γ appartient au sous–espace $V^J \times \check{V}^J$ de $\mathrm{End}_0(V)$. Posons $W = V^J$ et $W^* = \check{V}^J$ $(= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C}))$. Choisissons une base $\{w_1, \ldots, w_r\}$ de W sur $\mathbb{C}$, et notons $\{w_1^*, \ldots, w_r^*\}$ la base de W^* duale de $\{w_1, \ldots, w_r\}$. Pour $\gamma \in C$ et $v' \in V$, on a donc

$$\mathrm{T}_\gamma(v') = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \langle \mathrm{T}_\gamma(w_i), w_j^*\rangle \langle v', w_i^*\rangle w_j.$$

Par suite, pour $\gamma \in C$ et $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}
\Theta_{\varphi,\gamma}^K(g) &= \mathrm{vol}(K, dk)^{-1} \int_K \omega(k^{-1}) \langle \omega(g)\pi(g^{-1}) \circ \Pi(k^{-1}\cdot\gamma\cdot k) \circ \pi(g)(v), \check{v}\rangle dk \\
&= \omega(g) \langle \mathrm{T}_\gamma \circ \pi(g)(v), \check{\pi}(g)(\check{v})\rangle \\
&= \omega(g) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \langle \mathrm{T}_\gamma(w_i), w_j^*\rangle \langle \pi(g)(v), w_i^*\rangle \langle w_j, \check{\pi}(g)(\check{v})\rangle \\
&= \omega(g) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \langle \mathrm{T}_\gamma(w_i), w_j^*\rangle \pi_{v,w_i^*}(g) \pi_{w_j,\check{v}}(g^{-1}).
\end{aligned}$$

Si π est cuspidale, alors les coefficients de π sont à support compact modulo Z, et d'après le calcul ci-dessus, il existe une partie Ω de G compacte modulo Z telle que pour $\gamma \in C$ et $g \in G \smallsetminus \Omega$, on a $\Theta_{\varphi,\gamma}^K(g) = 0$.

Reprenons la démonstration dans le cas général. Puisque la fonction

$$G_{\mathrm{qr}}^\natural \rightarrow \mathrm{End}_0(V),\ \gamma \mapsto \mathrm{T}_\gamma$$

est localement constante (théorème de 5.8), il existe une constante $d_C > 0$ telle que

$$|\omega(g^{-1})\Theta_{\varphi,\gamma}^K(g)| \leq d_C \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r |\pi_{v,w_i^*}(g)| |\pi_{w_j,\check{v}}(g^{-1})| \quad (\gamma \in C,\, g \in G).$$

Par suite, pour $\gamma \in C$ on a

$$\begin{aligned}
d(\pi) \int_{G/Z} \omega(g^{-1}) \Theta_{\varphi,\gamma}^K(g) d\bar{g} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \langle \mathrm{T}_\gamma(w_i), w_j^*\rangle d(\pi) \int_{G/Z} \pi_{v,w_i^*}(g) \pi_{w_j,\check{v}}(g^{-1}) d\bar{g} \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \langle \mathrm{T}_\gamma(w_i), w_j^*\rangle \langle v, \check{v}\rangle \langle w_i, w_j^*\rangle \\
&= \varphi^\circ(1) \sum_{i=1}^r \langle \mathrm{T}_\gamma(w_i), w_i^*\rangle,
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=1}^r \langle \mathrm{T}_\gamma(w_i), w_i\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{T}_\gamma) = \Theta_\Pi(\gamma).$$

Choisissons un caractère ψ de G tel que les coefficients de $\pi' = \pi \otimes \psi$ sont de carré intégrable modulo Z. Pour $(u, \check{u}) \in V \times \check{V}$, on a

$$\pi_{u,\check{u}}(g) = \psi(g^{-1}) \pi'_{u,\check{u}}(g) \quad (g \in G),$$

et notant $|| \, ||_2$ la norme L^2 sur G/Z, on a $||\pi'_{u,\check{u}}||_2 < +\infty$. Ainsi, la majoration pour $|\omega^{-1}\Theta^K_{\varphi,\gamma}|$ donnée plus haut jointe à l'inégalité de Schwartz, entraînent que

$$\int_{G/Z} |\omega(g^{-1})\Theta^K_{\varphi,\gamma}(g)|d\bar{g} \leq d_C \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} ||\pi'_{v,w_i^*}||_2 ||\pi'_{w_j,\check{v}}||_2 \quad (\gamma \in C).$$

D'où l'assertion de convergence uniforme (d'après le "critère de M–test" de Weierstrass). □

6.2. Caractères des représentations irréductibles cuspidales. — Soit H un sous–groupe ouvert (donc fermé) de G, contenant Z et compact modulo Z. Soit $H^\natural$ un H–espace tordu qui soit un sous–espace topologique tordu de $G^\natural$. On note encore ω le caractère $\omega|_H$ de H. Soit (Σ, W) une ω–représentation lisse de $H^\natural$ telle que la représentation $\sigma = \Sigma^\circ$ de H est irréductible. Puisque H est compact modulo Z, l'espace W est de dimension finie, et l'on pose $\dim(\sigma) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$. Soit $(\Pi, V) = {}^{\omega}\mathrm{ind}_{H^\natural}^{G^\natural}(\Sigma, W)$ comme en 2.7, et posons $\pi = \Pi^\circ$. D'après [**Bu**, theo. 1], la représentation π est admissible si et seulement si elle est somme directe finie de représentations cuspidales. En particulier si la représentation π est irréductible, alors elle est cuspidale et on peut lui appliquer le théorème de 6.1.

On note $\Theta_\Sigma : G^\natural \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\Theta_\Sigma(\gamma) = \begin{cases} \mathrm{tr}(\Sigma(\gamma)) & \text{si } \gamma \in H^\natural \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On définit de la même manière la fonction $\Theta_\sigma : G \to \mathbb{C}$.

Fixons un sous–groupe ouvert compact K de H. Le théorème suivant est une généralisation de [**BH1**, appendix, theo. A.14].

Théorème. — *Supposons que π est irréductible.*

(1) *On a $d(\pi) = \dim(\sigma)\mathrm{vol}(H/Z, d\bar{g})^{-1}$.*

(2) *Pour $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, on a*

$$\Theta_\Pi(\gamma) = \mathrm{vol}(K, dg)^{-1} \sum_{g \in G/H} \omega(g^{-1}) \int_K \omega(k^{-1})\Theta_\Sigma(g^{-1}k^{-1}\cdot\gamma\cdot kg)dk;$$

la somme est finie. Mieux : pour toute partie compacte C de $G^\natural_{\mathrm{qr}}$, il existe un sous–ensemble fini $\Omega = \Omega(C)$ de G/H tel que

$$\int_K \omega(k^{-1})\Theta_\Sigma(g^{-1}k^{-1}\cdot\gamma\cdot kg)dk = 0 \quad (\gamma \in C,\ g \in (G/H)\smallsetminus\Omega).$$

Démonstration. — Choisissons une base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de W, et notons $\{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ la base de $W^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C})$ duale de $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note $v_i \in V$ et $\check{v}_i \in \mathrm{ind}_H^G(W^*)$ les fonctions telles $\mathrm{Supp}(v_i) = H = \mathrm{Supp}(\check{v}_i)$, $v_i(1) = w_i$ et $\check{v}_i(1) = w_i^*$. Via l'identification canonique $\check{V} = \mathrm{ind}_H^G(W^*)$, on a

$$\Theta_\Sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{v_i,\check{v}_i}(\gamma) \quad (\gamma \in G^\natural).$$

En particulier, la fonction Θ_Σ appartient à l'espace $\mathcal{A}(\Pi)$ des coefficients de Π, et pour $g \in G$, on a $\Theta^\circ_\Sigma(g) = \Theta_\sigma(g)$.

D'après la définition de $d(\pi)$, on a

$$\begin{aligned} d(\pi)\int_{G/Z}\Theta_\sigma(g)\Theta_\sigma(g^{-1})d\bar{g} &= d(\pi)\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_{G/Z}\pi_{v_i,\check{v_i}}(g)\pi_{v_j,\check{v_j}}(g^{-1})d\bar{g} \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle v_i,\check{v}_j\rangle\langle v_j,\check{v}_i\rangle \\ &= n = \dim(\sigma). \end{aligned}$$

D'autre part, notant $d\bar{h}$ la restriction de $d\bar{g}$ à H/Z, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_{G/Z}\Theta_\sigma(g)\Theta_\sigma(g^{-1})d\bar{g} &= \int_{H/Z}\Theta_\sigma(h)\Theta_\sigma(h^{-1})d\bar{h} \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_{H/Z}\langle\sigma(h)(w_i),w_i^*\rangle\langle\sigma(h^{-1})(w_j),w_j^*\rangle d\bar{h} \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\mathrm{vol}(H/Z,d\bar{g})}{\dim(\sigma)}\langle w_i,w_j^*\rangle\langle w_j,w_i^*\rangle \\ &= \mathrm{vol}(H/Z,d\bar{g}). \end{aligned}$$

D'où le point (1).

Soit K un sous–groupe ouvert compact de H. Appliquons le théorème de 6.1 à la fonction $\varphi=\Theta_\Sigma$. Pour $\gamma\in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, on a

$$\dim(\sigma)\Theta_\Pi(\gamma)=d(\pi)\int_{G/Z}\omega(g^{-1})\Theta^K_{\varphi,\gamma}(g)d\bar{g}.$$

Pour $\delta\in G^\natural$ et $h\in H$, si $\delta\notin H^\natural$ on a $\varphi(h^{-1}\cdot\delta\cdot h)=\varphi(\delta)=0$, et si $\delta\in H^\natural$ on a

$$\varphi(h^{-1}\cdot\delta\cdot h)=\mathrm{tr}(\Sigma(h^{-1}\cdot\delta\cdot h)=\omega(h)\varphi(\delta).$$

Par conséquent pour $\gamma\in G^\natural_{\mathrm{qr}}$, la fonction $G/Z\rightarrow\mathbb{C}$, $g\mapsto\omega(g^{-1})\Theta^K_{\varphi,\gamma}(g)$ se factorise à travers G/H, et d'après (1), on a

$$\Theta_\Pi(\gamma)=\sum_{g\in G/H}\omega(g^{-1})\Theta^K_{\varphi,\gamma}(g).$$

D'où le point (2), l'assertion de finitude se déduisant directement de loc. cit. □

7. Intégrales orbitales et caractères

Continuons avec les notations des ch. 5 et 6.

7.1. Intégrales orbitales tordues. — Soit un élément $\gamma\in G^\natural$ tel que :
- la G–orbite $\mathcal{O}_G(\gamma)=\{g^{-1}\cdot\gamma\cdot g : g\in G\}$ est fermée dans G ;
- le centralisateur $G_\gamma=\{g\in G : g^{-1}\cdot\gamma\cdot g=\gamma\}$ est unimodulaire.

Le choix d'une mesure de Haar dg_γ sur G_γ définit une distribution $\Lambda^G_\omega(\cdot,\gamma)=\Lambda^G_\omega(\cdot,\gamma,dg_\gamma)$ sur $G^\natural$: pour $\phi\in C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural)$, on pose

$$\Lambda^G_\omega(\phi,\gamma)=\begin{cases}0 & \text{si } \omega|_{G_\gamma}\neq 1\\ \int_{G_\gamma\backslash G}\omega(g)\phi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot g)\frac{dg}{dg_\gamma} & \text{sinon}\end{cases}.$$

Puisque la G–orbite de γ est fermée dans G, l'intégrale est absolument convergente (d'ailleurs c'est même une somme finie). On appelle $\Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma)$ la *ω–intégrale orbitale de γ*. Rappelons que l'on a posé ${}^x\phi = \phi \in \mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(x^{-1})$ ($\phi \in C_c^\infty(G)$, $x \in G$). Pour $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$ et $x \in G$, on a

$$(*)\qquad \Lambda_\omega^G({}^x\phi,\gamma) = \omega(x^{-1})\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma) = \Lambda_\omega^G(\phi, x^{-1}\cdot\gamma\cdot x).$$

Remarque. — Il est fort probable que le centralisateur G_γ d'un élément $\gamma \in G^\natural$ dont la G–orbite est fermée dans $G^\natural$, soit automatiquement unimodulaire ; mais nous n'essaierons pas de le démontrer ici. Notons que si $p = 1$ (i.e. si le corps de base F est de caractéristique nulle) et si $\mathbf{G}^\natural$ est localement de type fini, c'est–à–dire si le F–automorphisme de $Z(G)$ défini par $\mathbf{G}^\natural$ est d'ordre fini, on sait que pour tout élément $\gamma \in G^\natural$, le centralisateur G_γ est unimodulaire. ■

Soit $\gamma \in G^\natural$ quasi–semisimple. D'après la proposition 1 de 4.9, la G–orbite $\mathcal{O}_G(\gamma)$ est fermée dans $G^\natural$. Puisque le groupe $\mathbf{G}_\gamma^\circ$ est réductif (théorème 2 de 3.7) et défini sur F (théorème de 4.6), le groupe $G_\gamma^\circ = \mathbf{G}_\gamma^\circ(F)$ est unimodulaire. Comme le groupe quotient G_γ/G_γ° est fini, le choix d'une mesure de Haar dg_γ° sur G_γ° définit une distribution $\Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma) = \Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma,dg_\gamma^\circ)$ sur $G^\natural$: pour $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$, on pose

$$\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega|_{G_\gamma^\circ} \neq 1 \\ \int_{G_\gamma^\circ\backslash G} \omega(g)\phi(g^{-1}\cdot\gamma\cdot g)\frac{dg}{dg_\gamma^\circ} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Notons que si $\omega|_{G_\gamma} \neq 1$, on a $\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma) = 0$. Par ailleurs, le groupe G_γ est lui aussi unimodulaire, et si dg_γ est une mesure de Haar sur G_γ, alors notant dg_γ° la restriction à G_γ° de la mesure de Haar $|G_\gamma/G_\gamma^\circ|^{-1}dg_\gamma$ sur G_γ, on a

$$\Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma,dg_\gamma) = \Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma,dg_\gamma^\circ).$$

7.2. Descente parabolique. — Soit $P \in \mathcal{P}_\circ$. Rappelons que les mesures de Haar dg, $dm = dm_P$ et $du = du_P$ sur G, M_P et U_P sont celles normalisées par $K_\circ$ (cf. 5.2). Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a la formule d'intégration

$$(*)\qquad \int_G f(g)dg = \iiint_{M_P\times U_P\times K_\circ} f(muk)dmdudk.$$

Soit maintenant $P^\natural \in \mathcal{P}_\circ^\natural$. Posons $P = N_G(P^\natural)$, $M = M_P$, $M^\natural = M_P^\natural$ et $P^{-,\natural} = M^\natural \cdot U_{P^-}$. Posons aussi $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P$. Soit un élément $\gamma \in M^\natural$ tel que :
– la M–orbite $\mathcal{O}_M(\gamma) = \{m\cdot\gamma\cdot m^{-1} : m \in M\}$ est fermée dans $M^\natural$;
– le centralisateur $M_\gamma = \{m \in M : m^{-1}\cdot\gamma\cdot m = m\}$ est unimodulaire.
Alors le choix d'une mesure de Haar dm_γ sur M_γ définit comme en 7.1 une distribution $\Lambda_\omega^M(\cdot,\gamma) = \Lambda_\omega^M(\cdot,\gamma,dm_\gamma)$ sur $M^\natural$.

Lemme. — (1) *Pour $\gamma \in P^\natural$, on a $\delta_{P^\natural}(\gamma) = |\mathrm{det}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_P)|_F$.*

(2) *Pour $\gamma \in M^\natural$, on a $|\mathrm{det}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma)^{-1};\mathfrak{u}_P)|_F = |\mathrm{det}_F(\mathrm{Ad}_{P^{-,\natural}}(\gamma);\mathfrak{u}_{P^-})|_F$.*

Démonstration. — Soit $\gamma \in P^\natural$, et montrons (1). L'application $\mathrm{Int}_{P^\natural}(\gamma) : U_P \to U_P$ est un automorphisme de variété ϖ–adique, de Jacobien constant $J(\gamma) = |\det_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_P)|_F$. D'autre part, d'après la définition du module d'un automorphisme de U_P (cf. 2.1), on a $J(\gamma) = \Delta_{U_P}(\mathrm{Int}_{P^\natural}(\gamma)|_{U_P})$. Posons $\overline{P} = P/U_P$, $\overline{P}^\natural = P^\natural/U_P$ (c'est un $\overline{P}$–espace tordu) et

$\bar{\gamma} = \gamma \cdot U_P \in \overline{P}^\natural$. D'après la remarque de 5.3, on a $\delta_{P^\natural}(\gamma) = \Delta_{P^\natural}(\gamma)^{-1}\Delta_{\overline{P}^\natural}(\bar{\gamma})$. En remplaçant U_P par P (resp. $\overline{P}$) dans le raisonnement ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\delta_{P^\natural}(\gamma) &= \Delta_P(\mathrm{Int}_{P^\natural}(\gamma))\Delta_{\overline{P}}(\mathrm{Int}_{\overline{P}^\natural}(\bar{\gamma})^{-1})\\ &= |\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma);\mathfrak{p})|_F|\det{}_F(\mathrm{Ad}_{\overline{P}^\natural}(\bar{\gamma});\mathfrak{p}/\mathfrak{u}_P|_F^{-1}\\ &= |\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_P)|_F.\end{aligned}$$

Supposons que $\gamma \in M^\natural$, et montrons (2). D'après la démonstration du point (1), on a

$$\begin{aligned}\Delta_{G^\natural}(\gamma)^{-1} &= |\det{}_F(\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma);\mathfrak{g})|_F\\ &= |\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^-,\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_{P^-})|_F|\det{}_F(\mathrm{Ad}_{M^\natural}(\gamma);\mathfrak{m})|_F|\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_P)|_F\\ &= |\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^-,\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_{P^-})|_F\Delta_{M^\natural}(\gamma)^{-1}|\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_P)|_F.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma)^{-1};\mathfrak{u}_P)|_F = \Delta_{G^\natural}(\gamma)\Delta_{M^\natural}(\gamma)^{-1}|\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^-,\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_{P^-})|_F.$$

Or d'après la remarque de 5.3, on a $\Delta_{G^\natural} = 1$ et $\Delta_{M^\natural} = 1$. D'où le point (2). □

Pour $\gamma \in M^\natural$, l'automorphisme $\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)$ de $\mathfrak{g}$ stabilise $\mathfrak{m}$; en fait on a l'égalité

$$\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)|_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Ad}_{M^\natural}(\gamma).$$

On peut donc poser (pour la définition de $G^\natural/M$, cf. 2.4)

$$D_{G^\natural/M}(\gamma) = \det{}_F(\mathrm{id} - \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma);\mathfrak{g}/\mathfrak{m}) \quad (\gamma \in M^\natural).$$

Proposition. — *Soit $\gamma \in M^\natural$ tel que :*
- *la M–orbite $\mathcal{O}_M(\gamma)$ est fermée dans $M^\natural$;*
- *le centralisateur M_γ est unimodulaire ;*
- *on a les inclusions $G_\gamma \subset M$ et $\mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{m}$.*

Alors $D_{G^\natural/M}(\gamma) \neq 0$ et la G–orbite $\mathcal{O}_G(\gamma)$ est fermée dans $G^\natural$. De plus, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$, on a la formule de descente

$$|D_{G^\natural/M}(\gamma)|_F^{\frac{1}{2}}\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma) = \Lambda_\omega^M({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ},\gamma);$$

où les distributions $\Lambda_\omega^G(\cdot,\gamma)$ et $\Lambda_\omega^M(\cdot,\gamma)$ sur $G^\natural$ et sur $M^\natural$ sont définies par la même mesure de Haar dg_γ sur $G_\gamma = M_\gamma$ (pour la définition de ${}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}$, cf. 5.9).

Démonstration. — Pour $m \in M$, puisque $G_{m^{-1}\cdot\gamma\cdot m} \cap U_P = \{1\}$ et $\mathfrak{g}_{m^{-1}\cdot\gamma\cdot m} \cap \mathfrak{u}_P = \{0\}$, l'application

$$U_P \to U_P,\ u \mapsto \mathrm{Int}_{P^\natural}(m^{-1}\cdot\gamma\cdot m)^{-1}(u^{-1})u$$

est un automorphisme de variété ϖ–adique, de Jacobien

$$J(m^{-1}\cdot\gamma\cdot m) = |\det{}_F(\mathrm{id} - \mathrm{Ad}_{P^\natural}(m^{-1}\cdot\gamma\cdot m)^{-1};\mathfrak{u}_P)|_F \neq 0.$$

Comme

$$\mathrm{id}_{\mathfrak{p}} - \mathrm{Ad}_{P^\natural}(m^{-1}\cdot\gamma\cdot m)^{-1} = \mathrm{Ad}_P(m^{-1}) \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{p}} - \mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma)^{-1}) \circ \mathrm{Ad}_P(m),$$

on a

$$J(m^{-1}\cdot\gamma\cdot m) = J(\gamma).$$

D'après le lemme, on a

$$\begin{aligned}\delta_{P^\natural}^{1/2}(\gamma)J(\gamma) &= |\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_P)|_F^{\frac12}|\det{}_F(\mathrm{id}-\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma)^{-1};\mathfrak{u}_P)|_F\\ &= |\det{}_F(\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma)-\mathrm{id};\mathfrak{u}_P)|_F^{\frac12}|\det{}_F(\mathrm{id}-\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma)^{-1};\mathfrak{u}_P)|_F^{\frac12}\\ &= |\det{}_F(\mathrm{id}-\mathrm{Ad}_{P^\natural}(\gamma);\mathfrak{u}_P)|_F^{\frac12}|\det{}_F(\mathrm{id}-\mathrm{Ad}_{P^{-,\natural}}(\gamma);\mathfrak{u}_{P^-})|_F^{\frac12}\\ &= |\det{}_F(\mathrm{id}-\mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma);\mathfrak{g}/\mathfrak{m})|_F^{\frac12}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\delta_{P^\natural}^{1/2}(\gamma)J(\gamma) = |D_{G^\natural/M}(\gamma)|_F^{\frac12}\neq 0.$$

Pour $g\in G$, écrivons $g=kmu$ ($k\in K_\circ$, $m\in M$, $u\in U_P$) et posons $\gamma'=m^{-1}\cdot\gamma\cdot m$. Alors on a

$$g^{-1}\cdot\gamma\cdot g = \mathrm{Int}_G(k^{-1})(\gamma'\cdot\mathrm{Int}_{P^\natural}(\gamma')^{-1}(u^{-1})u).$$

Par conséquent

$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \mathrm{Int}_G(K)(\mathcal{O}_M(\gamma)\cdot U_P),$$

et puisque la M–orbite $\mathcal{O}_M(\gamma)$ est fermée dans $M^\natural$, la G–orbite $\mathcal{O}_G(\gamma)$ est fermée dans $G^\natural$.

Soit une fonction $\phi\in C_c^\infty(G^\natural)$. D'après la relation $(*)$, on a

$$\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma) = \iiint_{M_\gamma\backslash M\times U_P\times K_\circ}\omega(muk)\phi(k^{-1}u^{-1}m^{-1}\cdot\gamma\cdot muk)\frac{dm}{dg_\gamma}dudk.$$

Comme $\omega|_{U_P}=1$ (lemme de 5.9), le changement de variables $u\mapsto\mathrm{Int}_G(m^{-1}\cdot\gamma\cdot m)^{-1}(u^{-1})u$ dans la formule pour $\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma)$ donne

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega^G(\phi,\gamma) &= \int_{M_\gamma\backslash M}\omega(m)\delta_{P^\natural}^{-1/2}(\gamma)^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}(m^{-1}\cdot\gamma\cdot m)J(\gamma)^{-1}\frac{dm}{dg_\gamma}\\ &= |D_{G^\natural/M}(\gamma)|_F^{-\frac12}\Lambda_\omega^M({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ},\gamma).\end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

7.3. Formule d'intégration de Weyl. — Soit $(S,T,T^\natural)$ un triplet de Cartan de $G^\natural$ (4.7). Puisque $Z_G(T^\natural)=S$, l'application

$$\pi: S\backslash G\times T^\natural\to G^\natural,\ (g,\gamma)\mapsto g^{-1}\cdot\gamma\cdot g$$

est bien définie, et c'est un morphisme de variétés ϖ–adiques. Posons $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{s}=\mathrm{Lie}(S)$, $\overline{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}=\mathrm{Lie}(T)$. Soit $(\overline{g},\gamma)\in S\backslash G\times T^\natural$, et soit g un relèvement de $\bar g$ dans G. Via les isomorphismes de variétés ϖ–adiques

$$\begin{aligned}&S\backslash G\to S\backslash G,\ Sx\to Sxg,\\ &T\to T^\natural,\ t\mapsto t\cdot\gamma,\\ &G\to G^\natural, x\mapsto g^{-1}\cdot(x\cdot\gamma)\cdot g,\end{aligned}$$

identifions l'espace tangent à $S\backslash G$ (resp. $T^\natural$, $G^\natural$) en $\bar g$ (resp. γ, $g^{-1}\cdot\gamma\cdot g$) à $\overline{\mathfrak{g}}$ (resp. $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{g}$). Notons $p:\mathfrak{g}\to\overline{\mathfrak{g}}$ la projection canonique. Alors la différentielle $\mathrm{d}(\pi)_{\bar g,\gamma}:\overline{\mathfrak{g}}\times\mathfrak{t}\to\mathfrak{g}$ de π au point $(\bar g,\gamma)$, est donnée par

$$\mathrm{d}(\pi)_{\bar g,\gamma}(p(X),Y) = \mathrm{Ad}_G(\gamma)(X)-X+Y$$

D'après le début de la démonstration de la proposition de 5.4, si $\gamma\in T^\natural\cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$, on a l'égalité $\mathfrak{g}(1-\gamma)+\mathfrak{t}=\mathfrak{g}$. On en déduit le

Lemme 1. — *Pour tout $(\bar g,\gamma)\in S\backslash G\times(T^\natural\cap G^\natural_{\mathrm{reg}})$, l'application π est submersive en $(\bar g,\gamma)$.*

Notons $W = W(G,T)$ le groupe de Weyl $N_G(T)/T$. Puisque

$$\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)(N_G(T)) = N_G(\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)(T)) \quad (\gamma \in G^\natural),$$

tout élément $\gamma \in T^\natural$ induit un automorphisme $\tau_\gamma = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)|_{N_G(T)}$ de $N_G(T)$. Pour $\gamma \in T^\natural$, $t \in T$ et $n \in N_G(T)$, on a

$$\tau_{t\cdot\gamma}(n) = t\cdot\tau_\gamma(n)\cdot t^{-1} = t\tau_\gamma(n)t^{-1}\tau_\gamma(n)^{-1}\tau_\gamma(n) \in T\tau_\gamma(n).$$

On en déduit que τ_γ induit

– par passage au quotient un automorphisme τ_W de W,

– par restriction un automorphisme $\tau = \tau_T$ de T.

Ces deux automorphismes *ne dépendent pas* du choix de $\gamma \in T^\natural$ (bien que τ_γ en dépende). Posons

$$N_G(S^\natural) = \{g \in G : g\cdot S^\natural \cdot g^{-1} = S^\natural\},$$
$$N_G(T^\natural) = \{g \in G : g\cdot T^\natural \cdot g^{-1} = T^\natural\}.$$

On a les inclusions

$$N_G(S^\natural) \subset N_G(T^\natural) \subset N_G(S) \subset N_G(T).$$

L'inclusion du milieu et celle à droite résultent des égalités $Z_G(T^\natural) = S$ et $Z_G(S) = T$ (proposition de 4.7). Quant à l'inclusion de gauche, puisque $Z_G(S^\natural) = S$ (loc. cit.), on a l'inclusion $N_G(S^\natural) \subset N_G(S)$. Choisissons un élément $\delta_0 \in S^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$. Pour $n \in N_G(S^\natural)$, on a $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(n)(\delta_0) \in S^\natural = S\cdot\delta_0$, et comme $T^\natural = T\cdot\delta_0$, on obtient

$$n\cdot T^\natural\cdot n^{-1} = (nTn^{-1})\cdot \mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(n)(\delta_0) \subset T\cdot S^\natural = T^\natural.$$

Notons $W^\natural$ le sous–groupe de W formé des éléments fixés par τ_W, et posons

$$W(G,S^\natural) = N_G(S^\natural)/S,$$
$$W(G,T^\natural) = N_G(T^\natural)/T.$$

Lemme 2. — (1) *On a l'égalité $W^\natural = W(G,T^\natural)$.*

(2) *Supposons que $T_\tau = S$, $T(1-\tau)\cap S = \{1\}$ et $T = T_\tau T(1-\tau)$. Alors l'inclusion $N_G(S^\natural) \subset N_G(T^\natural)$ induit par passage aux quotients une identification*

$$W(G,S^\natural) = W(G,T^\natural).$$

Démonstration. — Pour $n \in N_G(T)$ et $\gamma \in T^\natural$, on a $n\cdot\gamma\cdot n^{-1} = n\tau_\gamma(n^{-1})\cdot\gamma$, et $n\cdot\gamma\cdot n^{-1} \in T^\natural$ si et seulement si $n\tau_\gamma(n^{-1}) \in T$. D'où le point (1).

Supposons que $T_\tau = S$, $T(1-\tau)\cap S = \{1\}$ et $T = T_\tau T(1-\tau)$, et montrons (2). Il s'agit de montrer que $N_G(T^\natural) = N_G(S^\natural)T$ $(= TN_G(S^\natural))$ et $N_G(S^\natural)\cap T = S$. Soit $n \in N_G(T^\natural)$ et $\gamma \in T^\natural$. Posons $t = n\tau_\gamma(n^{-1}) \in T$, et écrivons $t = s\tau(x)x^{-1} = x^{-1}s\tau(x)$ avec $s \in S$ et $x \in T$. On a donc

$$n\cdot\gamma\cdot n^{-1} = n\tau_\gamma(n^{-1})\cdot\gamma = x^{-1}s\tau_\gamma(x)\cdot\gamma = x^{-1}s\cdot\gamma\cdot x,$$

d'où $xn\cdot\gamma\cdot(xn)^{-1} = s\cdot\gamma$. Comme $xn \in N_G(S)$, on en déduit que $xn \in N_G(S^\natural)$ et $n \in TN_G(S^\natural)$. Soit maintenant $y \in N_G(S^\natural)\cap T$. Puisque $y\cdot S^\natural\cdot y^{-1} = y\tau(y^{-1})\cdot S^\natural$, on a $y\tau(y^{-1}) \in T(1-\tau)\cap S = \{1\}$, i.e. $y \in T_\tau = S$. □

Remarque 1. — Les hypothèses du point (2) sont rarement satisfaites. D'après la proposition de 3.4, elles le sont si τ est unipotent. ■

On définit comme suit une opération à gauche, continue et libre, de $S\backslash T$ sur $S\backslash G \times T^\natural$: pour $\bar{t} \in S\backslash T$ et $(\bar{g}, \gamma) \in S\backslash G \times T^\natural$, on choisit un représentant t de $\bar{t}$ dans T et un représentant g de $\bar{g}$ dans G, et l'on pose

$$\begin{aligned}
&\bar{t} \cdot \bar{g} = Stg,\\
&\bar{t} \cdot (\bar{g}, \gamma) = (\bar{t} \cdot \bar{g}, t \cdot \gamma \cdot t^{-1}) = (\bar{t} \cdot \bar{g}, t\tau(t^{-1}) \cdot \gamma).
\end{aligned}$$

Puisque $T = Z_G(S)$ et $\tau|_S = \mathrm{id}$, l'élément $\bar{t} \cdot (\bar{g}, \gamma)$ est bien défini. Soit

$$X = S\backslash G \times_{S\backslash T} T^\natural$$

le quotient de $S\backslash G \times T^\natural$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par :

$$(\bar{g}, \gamma) \sim (\bar{g}', \gamma') \Leftrightarrow \text{il existe un } \bar{t} \in S\backslash T \text{ tel que } (\bar{g}', \gamma') = \bar{t} \cdot (\bar{g}, \gamma).$$

On note $q : S\backslash G \times T^\natural \to X$ la projection canonique. L'application $\pi : S\backslash G \times T^\natural \to G^\natural$ se factorise à travers q : on note $\bar{\pi} : X \to G^\natural$ l'unique application telle que $\bar{\pi} \circ q = \pi$. Par construction, X est une variété ϖ–adique (pour la topologie quotient) de dimension $\dim(G^\natural) = \dim(G)$, et q et $\bar{\pi}$ sont des morphismes de variétés ϖ–adiques.

On définit comme suit une opération à gauche, continue et libre, de $W^\natural$ sur X : pour $w \in W^\natural$ et $(\bar{g}, \gamma) \in S\backslash G \times T^\natural$, on choisit un représentant g de $\bar{g}$ dans G et un représentant n de w dans $N_G(T^\natural)$, et l'on pose

$$w \cdot q(\bar{g}, \gamma) = q(Sng, n\tau_\gamma(n) \cdot \gamma).$$

L'opération est bien définie : si $g' = xg$ et $n' = yn$ pour des x, $y \in T$, alors posant $\gamma' = x\tau(x^{-1}) \cdot \gamma$ et $t = ynxn^{-1} \in T$, on a

$$\begin{aligned}
(Sn'g', n'\tau_{\gamma'}(n'^{-1}) \cdot \gamma') &= (Stg, ynx\tau(x^{-1}) \cdot \gamma \cdot n^{-1}y^{-1})\\
&= (Stg, tn\tau_\gamma(n^{-1})\tau_\gamma(nx^{-1})\tau_\gamma(n^{-1}y^{-1}) \cdot \gamma)\\
&= (Stg, tn\tau_\gamma(n^{-1})\tau_\gamma(t^{-1}) \cdot \gamma)\\
&= (Stg, t\tau(t^{-1})n\tau_\gamma(n^{-1}) \cdot \gamma).
\end{aligned}$$

Pour $(\bar{g}, \gamma) \in S\backslash G \times T^\natural$ et $w \in W^\natural$, on a

$$(*) \qquad \bar{\pi}(w \cdot q(\bar{g}, \gamma)) = \pi(\bar{g}, \gamma).$$

Pour toute partie Y de $G^\natural$, notons ${}^G Y$ l'ensemble des $g^{-1} \cdot \delta \cdot g$ pour $g \in G$ et $\delta \in Y$. Ainsi on a ${}^G T^\natural = \mathrm{Im}(\pi)$, et ${}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}} = {}^G(T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}) = \pi(S\backslash G \times (T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}))$.

Lemme 3. — *Pour $\delta \in {}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$, la fibre*

$$\bar{\pi}^{-1}(\delta) = q(\{(\bar{g}, \gamma) \in S\backslash G \times T^\natural : \pi(\bar{g}, \gamma) = \delta\})$$

de $\bar{\pi}$ au dessus de δ, est un espace principal homogène sous $W^\natural$.

Démonstration. — Soit $\delta \in {}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$. Écrivons $\delta = \pi(\bar{g}', \gamma')$ pour un $(\bar{g}', \gamma') \in S\backslash G \times T^\natural$, et soit $(\bar{g}, \gamma) \in S\backslash G \times T^\natural$ tel que $\pi(\bar{g}, \gamma) = \delta$. Choisissons des relèvements g et g' de $\bar{g}$ et $\bar{g}'$ dans G. Puisque $\delta \in {}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$, on a γ, $\gamma' \in T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$, et comme $g'g^{-1} \cdot \gamma \cdot gg'^{-1} = \gamma'$ et $\mathbf{G}^\circ_\gamma(F) = S = \mathbf{G}^\circ_{\gamma'}(F)$, on a $n = g'g^{-1} \in N_G(S)$. Alors $n \cdot \gamma \cdot n^{-1} = n\tau_\gamma(n^{-1}) \cdot \gamma = \gamma' \in T^\natural$. Par conséquent $n\tau_\gamma(n) \in T$, i.e. $n \in N_G(T^\natural)$. Posons $w \in nT \in N_G(T^\natural)/T = W^\natural$. On a $w \cdot q(\bar{g}, \gamma) = q(\bar{g}', \gamma')$. D'où le lemme, puisque $W^\natural$ opère librement sur X. $\square$

Posons
$$X_{\mathrm{reg}} = \bar{\pi}^{-1}({}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}) = q(S\backslash G \times (T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}})).$$
D'après le lemme 1, l'ensemble
$${}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}} = \pi(S\backslash G \times (T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}))$$
est ouvert dans $G^\natural$, par suite X_{reg} est ouvert dans X. Rappelons que $\dim(X) = \dim(G^\natural)$. D'après les lemmes 1 et 3, l'application $\bar{\pi} : X \to G^\natural$ induit par restriction une application surjective $\bar{\pi}_{\mathrm{reg}} : X_{\mathrm{reg}} \to {}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$ vérifiant :

– pour $x \in X_{\mathrm{reg}}$, la différentielle $\mathrm{d}(\bar{\pi})_x$ de $\bar{\pi}$ au point x est un isomorphisme ;

– pour $\delta \in {}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$, la fibre $\bar{\pi}^{-1}(\delta)$ est un espace principal homogène sous $W^\natural$.

En d'autres termes, $\bar{\pi}_{\mathrm{reg}}$ est un revêtement galoisien principal de groupe $W^\natural$.

Notons $\overline{T}$ le groupe quotient $T(1-\tau)\backslash T$, et $\overline{T}^\natural$ le $\overline{T}$–espace tordu $T(1-\tau)\backslash T^\natural$. Pour $\gamma \in T^\natural$, on pose
$$D_{G^\natural/T}(\gamma) = \det{}_F(\mathrm{id} - \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma); \mathfrak{g}/\mathfrak{t}).$$
Pour $\gamma \in T^\natural$ et $t \in T$, on a $t^{-1}\tau(t) \cdot \gamma = t^{-1} \cdot \gamma \cdot t$, d'où
$$\begin{aligned} D_{G^\natural/T}(t^{-1}\tau(t)\cdot\gamma) &= \det{}_F(\mathrm{id} - \mathrm{Ad}_{G^\natural}(t^{-1}\cdot\gamma\cdot t); \mathfrak{g}/\mathfrak{t}) \\ &= \det{}_F(\mathrm{Ad}_G(t^{-1}) \circ (\mathrm{id} - \mathrm{Ad}_{G^\natural}(\gamma)) \circ \mathrm{Ad}_G(t); \mathfrak{g}/\mathfrak{t}) \\ &= D_{G^\natural/T}(\gamma). \end{aligned}$$
Par conséquent l'application $D_{G^\natural/T} : T^\natural \to F$ se factorise à travers $\overline{T}^\natural$.

Toute mesure de Haar ds sur S définit comme suit une mesure de Haar $d\bar{\gamma} = d\bar{\gamma}(ds)$ sur $\overline{T}^\natural$. Puisque le groupe T_τ/S est fini, il existe une unique mesure de Haar sur T_τ prolongeant ds, que l'on note encore ds. Via la suite exacte longue de groupes topologiques
$$1 \to T_\tau \to T \xrightarrow{1-\tau} T \to \overline{T} \to 1,$$
ds définit une mesure de Haar $d\bar{t} = d\bar{t}(ds)$ sur le groupe quotient $\overline{T}$. Précisément, choisissons une mesure de Haar dt sur T, et notons $d\tilde{t}$ l'image de la mesure quotient $\frac{dt}{ds}$ sur $T_\tau\backslash T$ par l'isomorphisme de groupes topologiques de $T_\tau\backslash T \xrightarrow{1-\tau} T(1-\tau)$. La mesure quotient $d\bar{t} = \frac{dt}{d\tilde{t}}$ sur $\overline{T}$ dépend seulement de ds, et pas du choix de dt. Alors $d\bar{\gamma}$ est la mesure de Haar àgauche sur $\overline{T}^\natural$ associée à $d\bar{t}$ comme en 2.5 (c'est aussi une mesure de Haar à droite) ; i.e. on pose $d\bar{\gamma} = \bar{\delta} \cdot d\bar{t}$ pour un (i.e. pour tout) $\bar{\delta} \in \overline{T}^\natural$. De manière équivalente, notant $d\gamma$ la mesure de Haar à gauche sur $T^\natural$ associée à dt, la mesure quotient $\frac{d\gamma}{d\tilde{t}}$ sur $\overline{T}^\natural$ dépend seulement de ds, et pas du choix de dt, et elle coïncide avec $d\bar{\gamma}$.

Notons $d\delta$ la mesure de Haar $\delta_1 \cdot dg$ sur $G^\natural$.

Remarque 2. — Posons $Y = T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$. Puisque ${}^G Y$ est ouvert dans $G^\natural$ et que $G^\natural_{\mathrm{reg}}$ est dense dans $G^\natural$, l'ensemble ${}^G T^\natural \smallsetminus {}^G Y$ est négligeable dans $G^\natural$ (par rapport à $d\delta$). En particulier, toute fonction intégrable ϕ sur $G^\natural$ est intégrable sur ${}^G T^\natural$, et l'on a $\int_{{}^G T^\natural} \phi(\delta) d\delta = \int_{{}^G Y} \phi(\delta) d\delta$. D'autre part, l'image $\overline{Y}$ de Y dans $\overline{T}^\natural$ est ouverte dans $\overline{T}^\natural$, et l'ensemble $\overline{T}^\natural \smallsetminus \overline{Y}$ est négligeable dans $\overline{T}^\natural$ (par rapport à $d\bar{\gamma}$). ■

On en déduit la « formule d'intégration de H. Weyl » suivante :

Proposition. — *Soit ds une mesure de Haar sur S. Posons $d\bar{g} = \frac{dg}{ds}$ et $d\bar{\gamma} = d\bar{\gamma}(ds)$. Soit ϕ une fonction intégrable sur ${}^G T^\natural$ (par rapport à $d\delta$). Pour presque tout $\gamma \in T^\natural$, la fonction*

$S\backslash G \to \mathbb{C}$, $\bar{g} \mapsto \phi \circ \pi(\bar{g}, \gamma)$ *est intégrable sur* $S\backslash G$ *(par rapport à* $d\bar{g}$*), et l'on a*

$$\int_{{}^G T^\natural} \phi(\delta) d\delta = \frac{1}{|W^\natural|} \int_{\overline{T}^\natural} |D_{G^\natural/T}(\gamma)|_F \left\{ \int_{S\backslash G} \phi(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g) d\bar{g} \right\} d\bar{\gamma}.$$

Fixons un système de représentants $\mathcal{C}$ des classes de G–conjugaison de sous–espaces de Cartan $T^\natural$ de $G^\natural$ — ou, ce qui revient au même, de triplets de Cartan $(S, T, T^\natural)$ de $G^\natural$. Pour chaque élément $(S, T, T^\natural)$ de $\mathcal{C}$, le choix d'une mesure de Haar ds sur S définit une mesure de Haar $d\bar{\gamma} = d\bar{\gamma}(ds)$ sur $\overline{T}^\natural$ et, pour tout $\gamma \in T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$, une distribution $\Lambda^G_\omega(\cdot, \gamma)$ sur $G^\natural$: pour $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural)$, on pose

$$\Lambda^G_\omega(\phi, \gamma) = \int_{S\backslash G} \omega(g) \phi(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g) \frac{dg}{ds}.$$

Corollaire 1. — *Soit* Θ *une fonction localement intégrable sur* $G^\natural$ *(par rapport à* $d\delta$*), définie sur* $G^\natural_{\mathrm{reg}}$ *et telle que*

$$\Theta(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g) = \omega(g)\Theta(\gamma) \quad (g \in G,\ \gamma \in G^\natural_{\mathrm{reg}}).$$

Pour toute fonction $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural)$*, on a*

$$\int_{G^\natural} \Theta(\delta)\phi(\delta) d\delta = \sum_{T^\natural} \frac{1}{|W(G, T^\natural)|} \int_{\overline{T}^\natural} |D_{G^\natural/T}(\gamma)|_F \Theta(\gamma) \Lambda^G_\omega(\phi, \gamma) d\bar{\gamma},$$

où $T^\natural$ *parcourt les éléments de* $\mathcal{C}$.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que pour $T^\natural \in \mathcal{C}$, $\gamma \in T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$ et $t \in T$, on a

$$\Lambda^G_\omega(\phi, t^{-1} \cdot \gamma \cdot t) = \omega(t^{-1}) \Lambda^G_\omega(\phi, \gamma).$$

Par conséquent la fonction $\gamma \mapsto \Theta(\gamma)\Lambda^G_\omega(\phi, \gamma)$ sur $T^\natural \cap G^\natural$ se factorise à travers l'image de $T^\natural \cap G^\natural$ dans $\overline{T}^\natural$, et l'énoncé a bien un sens.

La fonction $\delta \mapsto \Theta(\delta)\phi(\delta)$ est intégrable sur $G^\natural$ (et définie sur $G^\natural_{\mathrm{reg}}$). On a donc

$$\int_{G^\natural} \Theta(\delta)\phi(\delta) d\delta = \sum_{T^\natural} \int_{{}^G T^\natural} \Theta(\delta)\phi(\delta) d\delta$$

où $T^\natural$ parcourt les éléments de $\mathcal{C}$. Pour $(S, T, T^\natural) \in \mathcal{C}$, d'après la proposition on a

$$\begin{aligned} \int_{{}^G T^\natural} \Theta(\delta)\phi(\delta) d\delta &= \frac{1}{|W^\natural|} \int_{\overline{T}^\natural} |D_{G^\natural/T}(\gamma)|_F \left\{ \int_{S\backslash G} \Theta(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g) \phi(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g) \frac{dg}{ds} \right\} d\bar{\gamma} \\ &= \frac{1}{|W^\natural|} \int_{\overline{T}^\natural} |D_{G^\natural/T}(\gamma)|_F \Theta(\gamma) \Lambda^G_\omega(\phi, \gamma) d\bar{\gamma}; \end{aligned}$$

où l'on a posé $W^\natural = W(G, T^\natural)$. D'où le corollaire. □

Corollaire 2. — *Soit* Π *une* ω*–représentation admissible de* $G^\natural$ *telle que* Π° *est de type fini. Pour toute fonction* $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural_{\mathrm{reg}})$*, on a*

$$\Theta_\Pi(\phi) = \sum_{T^\natural} \frac{1}{|W(G, T^\natural)|} \int_{\overline{T}^\natural} |D_{G^\natural/T}(\gamma)|_F \Theta_\Pi(\gamma) \Lambda^G_\omega(\phi, \gamma) d\bar{\gamma},$$

où $T^\natural$ *parcourt les éléments de* $\mathcal{C}$.

Corollaire 3. — *Soit* $P^\natural \in \mathcal{P}^\natural_\circ$*,* Σ *une* ω*–représentation admissible de* $M^\natural_P$ *telle que* Σ° *est de type fini, et* $\Pi = {}^\omega\iota^{G^\natural}_{P^\natural}(\Sigma)$*.*

(1) *Le support de la fonction caractère* $\Theta_\Pi : G^\natural_{\mathrm{qr}} \rightarrow \mathbb{C}$ *(c'est–à–dire l'ensemble des* $\gamma \in G^\natural_{\mathrm{qr}}$ *tels que* $\Theta_\Pi(\gamma) \neq 0$*) est contenu dans* ${}^G(M^\natural_P \cap G^\natural_{\mathrm{qr}}) = {}^G M^\natural_P \cap G^\natural_{\mathrm{qr}}$.

(2) *Soit* $T^\natural$ *un sous–espace de Cartan de* $M^\natural_P$*, et soit* $\{T^\natural_1, \ldots, T^\natural_s\}$ *un système de représentants des classes de* M_P*–conjugaison de sous–espaces de Cartan de* $M^\natural_P$ *conjugués à* $T^\natural$ *dans* G *:*
  - $T^\natural_i$ *est un sous–espace de Cartan de* $M^\natural_P$ *de la forme* $g_i^{-1} \cdot T^\natural \cdot g_i$ *pour un élément* $g_i \in G$ *;*
  - *tout sous–espace de Cartan de* $M^\natural_P$ *conjugué à* $T^\natural$ *dans* G *est conjugué à l'un des* $T^\natural_i$ *dans* M_P *;*
  - *les* $T^\natural_i$ *sont deux–à–deux non conjugués dans* M_P.

  Pour $i = 1, \ldots s$*, posons* $\overline{W}^\natural_i = W(M_P, T^\natural_i) \backslash W(G, T^\natural_i)$*, et soit* $\{n_w : w \in \overline{W}^\natural_i\}$ *un système de représentants des éléments de* $\overline{W}^\natural_i$ $(= N_{M_P}(T^\natural_i) \backslash N_G(T^\natural_i))$ *dans* $N_G(T^\natural_i)$. *Pour* $\gamma \in T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$*, on a l'égalité*

$$\Theta_\Pi(\gamma) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{w \in \overline{W}^\natural_i} \omega(g_i n_w)^{-1} |D_{G^\natural/M_P}(\gamma^{g_i n_w})|_F^{-\frac{1}{2}} \Theta_\Sigma(\gamma^{g_i n_w})$$

  où l'on a posé $\gamma^{g_i n_w} = \mathrm{Int}'_G(g_i n_w)^{-1}(\gamma)$ $(= n_w^{-1} g_i^{-1} \cdot \gamma \cdot g_i n_w)$.

Démonstration. — Posons $M = M_P$ et $M^\natural = M^\natural_P$. Puisque Σ° est admissible et de type fini, Π° l'est aussi. Les fonctions caractères Θ_Σ sur $M^\natural_{\mathrm{qr}}$ et Θ_Π sur $G^\natural_{\mathrm{qr}}$ sont donc bien définies.

Montrons (1). D'après le théorème de 5.9, il suffit de montrer que si ϕ est une fonction dans $C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural_{\mathrm{qr}})$ dont le support ne rencontre pas ${}^G M^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{qr}}$, alors ${}^\omega\phi_{P^\natural, K_\circ} = 0$. Soit une fonction $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G^\natural_{\mathrm{qr}})$ telle que ${}^\omega\phi_{P^\natural, K_\circ} \neq 0$. Puisque $M^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{qr}}$ est ouvert dense dans $M^\natural$, il existe un $\delta \in M^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{qr}}$ tel que ${}^\omega\phi_{P^\natural, K_\circ}(\delta) \neq 0$. D'après la définition de ${}^\omega\phi_{P^\natural, K_\circ}$, il existe un $k \in K_\circ$ et un $u \in U_P$ tels que $\phi(k^{-1} \cdot \delta \cdot uk) \neq 0$, et d'après la démonstration de la proposition de 7.2, il existe un (unique) $u' \in U_P$ tel que $u = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta)^{-1}(u'^{-1})u'$. On a donc $k^{-1} \cdot \delta \cdot uk = k^{-1} u'^{-1} \cdot \delta \cdot u'k \in {}^G M^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{qr}}$, d'où le point (1).

Montrons (2). Soit Θ la fonction sur $T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$ définie par

$$(**) \qquad \Theta(\gamma) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{w \in \overline{W}^\natural_i} \omega(g_i n_w)^{-1} |D_{G^\natural/M}(\gamma^{g_i n_w})|_F^{-\frac{1}{2}} \Theta_\Sigma(\gamma^{g_i n_w}).$$

Puisque pour $\delta \in M^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$ et $m \in M$, on a

$$\omega(m)^{-1} |D_{G^\natural/M}(\delta^m)|_F^{-\frac{1}{2}} \Theta_\Sigma(\delta^m) = |D_{G^\natural/M}(\delta)|_F^{-\frac{1}{2}} \Theta_\Sigma(\delta),$$

l'expression à droite de l'égalité dans $(**)$ ne dépend pas du choix de $\{g_1, \ldots, g_s\}$ ni de celui de $\{n_w : w \in \overline{W}^\natural_i\}$; d'ailleurs elle ne dépend pas non plus du choix de $\{T^\natural_1, \ldots, T^\natural_s\}$. On en déduit que si $\gamma \in T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$ et $g \in G$ sont tels que $g^{-1} \cdot \gamma \cdot g \in T^\natural$, puisque $g \in N_G(T^\natural)$, on a

$$\Theta(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g) = \omega(g)\Theta(\gamma).$$

On peut donc prolonger Θ à ${}^G T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$ en posant

$$\Theta(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g) = \omega(g)\Theta(\gamma) \quad (\gamma \in T^\natural \cap G^\natural_{\mathrm{reg}},\ g \in G).$$

Pour $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty({}^GT^\natural\cap G^\natural_{\mathrm{reg}})$, $\phi\geq 0$, la fonction $|\Theta|\phi$ sur ${}^GT^\natural\cap G^\natural_{\mathrm{reg}}$, prolongée par 0 à $G^\natural$ tout entier, est mesurable (par rapport à $d\delta$), et d'après le corollaire 1, on a

$$\begin{aligned}&\int_{G^\natural}|\Theta(\delta)|\phi(\delta)d\delta=\\&=\frac{1}{|W^\natural|}\int_{\overline{T}^\natural}|D_{G^\natural/T}(\gamma)|_F|\Theta(\gamma)|\Lambda^G_{|\omega|}(\phi,\gamma)d\bar{\gamma}\\&\leq\frac{1}{|W^\natural|}\sum_{i=1}^s\sum_{w\in\overline{W}_i^\natural}\int_{\overline{T}^\natural}|\omega(\gamma^{g_in_w})|^{-1}\frac{|D_{G^\natural/T}(\gamma)|_F}{|D_{G^\natural/M}(\gamma^{g_in_w})|_F^{\frac12}}|\Theta_\Sigma(\gamma^{g_in_w})|\Lambda^G(\phi,\gamma)d\bar{\gamma};\end{aligned}$$

où l'on a posé $W^\natural=W(G,T^\natural)$. Pour $i=1,\ldots,s$, $w\in\overline{W}_i^\natural$ et $\gamma\in T^\natural\cap G_{\mathrm{reg}}$, on a

$$|\omega(\gamma^{g_in_w})|^{-1}\Lambda^G_{|\omega|}(\phi,\gamma)=\Lambda^G_{|\omega|}(\phi,\gamma^{g_in_w}),$$

pourvu que les mesures de Haar ds_i sur $S_i=Z(T_i^\natural)$ aient été choisies de manière compatible, ce que l'on suppose. Alors d'après la proposition de 7.2, on a

$$\Lambda^G_{|\omega|}(\phi,\gamma^{g_in_w})=|D_{G^\natural/M}(\gamma^{g_in_w})|_F^{-\frac12}\Lambda^M_{|\omega|}({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ},\gamma^{g_in_w}).$$

Comme

$$|D_{G^\natural/T}(\gamma)|_F=|D_{G^\natural/T}(\gamma^{g_in_w})|_F=|D_{G^\natural/M}(\gamma^{g_in_w})|_F|D_{M^\natural/T}(\gamma^{g_in_w})|_F$$

et

$$|W^\natural|=|W(G,T_i^\natural)|,$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{G^\natural}|\Theta(\delta)|\phi(\delta)d\delta\\&\leq\frac{1}{|W(G,T^\natural)|}\sum_{i=1}^s\int_{\overline{T}^\natural}|D_{M^\natural/T}(\gamma^{g_in_w})|_F|\Theta_\Sigma(\gamma^{g_in_w})|\Lambda^M_{|\omega|}({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ},\gamma^{g_in_w})d\bar{\gamma}\\&=\sum_{i=1}^s\frac{1}{|W(G,T_i^\natural)|}\sum_{w\in\overline{W}_i^\natural}\int_{\overline{T}_i^\natural}|D_{M^\natural/T}(\gamma_i^{n_w})|_F|\Theta_\Sigma(\gamma_i^{n_w})|\Lambda^M_{|\omega|}({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ},\gamma_i^{n_w})d\bar{\gamma}_i\\&=\sum_{i=1}^s\frac{1}{|W(M,T_i^\natural)|}\int_{\overline{T}_i^\natural}|D_{M^\natural/T}(\gamma_i)|_F|\Theta_\Sigma(\gamma_i)|\Lambda^M_{|\omega|}({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ},\gamma_i)d\bar{\gamma}_i,\end{aligned}$$

d'où (à nouveau d'après le corollaire 1)

$$\int_{G^\natural}|\Theta(\delta)|\phi(\delta)d\delta\leq\int_{{}^GT^\natural\cap M^\natural_{\mathrm{reg}}}|\Theta_\Sigma(\delta_M)|^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}(\delta_M)d\delta_M.$$

La fonction $\Theta\phi$ est donc intégrable sur $G^\natural$, et vérifie

$$\int_{G^\natural}\Theta(\delta)\phi(\delta)d\delta=\int_{{}^GT^\natural\cap M^\natural}\Theta_\Sigma(\delta_M)^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}(\delta_M)d\delta_M=\Theta_\Sigma({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}).$$

On conclut grâce au théorème 5.9. □

Remarque 3. — Pour les caractères non tordus des représentations admissibles, de type fini et *unitarisables*, le corollaire 2 est dû à Van Dijk [**VD**]. L'hypothèse d'unitarisabilité a ensuite été supprimée par Clozel [**Cl1**]. D'ailleurs dans loc. cit., le corollaire 2 est aussi démontré dans le cas tordu suivant (changement de base pour le groupe linéaire) : G est le groupe des points F–rationnels de $\mathbf{G}=\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{GL}_{n/F}\times_F E)$ pour un entier $n\geq 1$ et une extension finie cyclique E de F — on a donc $G = \mathrm{GL}_n(E)$ —, $G^\natural = G\theta$ où θ est le F–automorphisme de $\mathbf{G}$ donné par un générateur du groupe $\mathrm{Gal}(E/F)$, et $\omega = 1$. ■

Annexe A
Représentations irréductibles d'un G–espace tordu

Dans cette annexe A, on fixe un groupe topologique localement profini G, un G–espace tordu $G^\natural$ et un caractère ω de G. On fixe aussi une mesure de Haar à gauche d_lg sur G, et l'on note $d_l\delta$ $(= \delta \cdot d_lg)$ la mesure de Haar à gauche sur $G^\natural$ associée à d_lg (cf. 2.5). Sauf précision contraire, les modules considérés sont des modules *à gauche*.

A.1. Rappels sur les représentations (lisses) irréductibles de G. — Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$ l'algèbre de Hecke de G, i.e. l'espace $C_c^\infty(G)$ muni du produit de convolution défini par

$$f * f'(x) = \int_G f(g)f'(g^{-1}x)d_lg \quad (f,\, f' \in C_c^\infty(G);\, x \in G).$$

C'est une $\mathbb{C}$–algèbre à idempotents, en général sans unité. Si (π, V) est une représentation lisse de G, l'espace V est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{H}$–module : pour $f \in \mathcal{H}$ et $v \in V$, on pose $f \cdot v = \pi(f)(v)$, cf. 2.2. On obtient ainsi un isomorphisme entre la catégorie des représentations lisses de G et une sous–catégorie pleine de la catégorie des $\mathcal{H}$–modules : celle formée des $\mathcal{H}$–modules V *non dégénérés*, c'est–à–dire tels que $\mathcal{H} \cdot V = V$.

Soit K un sous–groupe ouvert compact de G. On note e_K la fonction caractéristique de K divisée par $\mathrm{vol}(K, d_lg)$; c'est un idempotent de $\mathcal{H}$. Notons $\mathcal{H}_K = \mathcal{H}(G, K)$ l'algèbre de Hecke $e_K * \mathcal{H} * e_K$, i.e. l'espace $C_c(K\backslash G/K)$ muni du produit de convolution défini comme ci-dessus. C'est une $\mathbb{C}$–algèbre à unité (e_K est l'unité). Si (π, V) est une représentation lisse de G, le sous–espace V^K de V formé des vecteurs K–invariants coïncide avec $\pi(e_K)(V)$. De plus la structure de $\mathcal{H}$–module sur V induit une structure de $\mathcal{H}_K$–module sur V^K.

Si (π, V) est une représentation lisse de G, on a $V = \bigcup_K V^K$ où K parcourt les sous–groupes ouverts compacts de G (resp. un système fondamental de voisinages de 1 dans G formé de tels sous–groupes). D'ailleurs, puisque $\mathcal{H} = \bigcup_K e_K * \mathcal{H}$, un $\mathcal{H}$–module V' est non dégénéré si et seulement si $V' = \bigcup_K e_K \cdot V'$. Si (π, V) est une représentation lisse irréductible de G, alors pour tout sous–groupe ouvert compact K de G, le $\mathcal{H}_K$–module V^K est nul ou simple [**BZ**, prop. 2.10]. D'autre part (loc. cit.), fixé K, l'application $(\pi, V) \mapsto V^K$ induit une bijection entre :
- l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de G ayant un vecteur non nul fixé par K ;
- l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_K$–modules simples.

Cette bijection induit par restriction une bijection entre :
- l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations admissibles irréductibles de G ayant un vecteur non nul fixé par K ;
- l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_K$–modules simples de dimension finie.

Tout comme pour les groupes finis, le caractère d'une représentation admissible irréductible de G détermine cette représentation à isomorphisme près [**BZ**, prop. 2.19] :

Proposition. — *Soit $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ des représentations admissibles irréductibles de G deux–à–deux non isomorphes. Alors les distributions $\Theta_{\pi_1}, \Theta_{\pi_2}, \ldots, \Theta_{\pi_n}$ sont linéairement indépendantes.*

Corollaire. — *Deux représentations admissibles irréductibles π_1 et π_2 de G sont isomorphes si et seulement si $\Theta_{\pi_1} = \Theta_{\pi_2}$.*

A.2. ω–représentations G–irréductibles de $G^\natural$.— Cette annexe A a pour principal objectif la généralisation de la proposition de A.1 aux ω–représentations admissibles de $G^\natural$, précisément l'indépendance linéaire des distributions Θ_Π pour Π parcourant les ω–représentations admissibles G–irréductibles de $G^\natural$ (proposition de A.5) ; où par *G–irréductible* on entend une ω–représentation (lisse) Π de $G^\natural$ telle que la représentation Π° de G est irréductible. On pourrait donc se limiter à l'étude des ω–représentations admissibles G–irréductibles de $G^\natural$. On va voir qu'on peut facilement décrire une classe beaucoup plus large d'objets simples de la catégorie $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$ en termes des représentations irréductibles de G.

Une ω–représentation lisse non nulle (Π, V) de $G^\natural$ est dite *irréductible* si c'est un objet simple dans la catégorie $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$, autrement si le seul sous–espace non nul V' de V tel que $\Pi(\delta)(V') = V'$ pour tout élément $\delta \in G^\natural$ — ou, ce qui revient au même, tel que V' est G–stable et $\Pi(\delta)(V') = V'$ pour un élément $\delta \in G^\natural$ — est V lui–même. Bien sûr, si une ω–représentation Π de $G^\natural$ est G–irréductible, alors elle est automatiquement irréductible ; mais l'inverse n'est en général pas vrai.

Fixons un élément $\delta_1 \in G^\natural$ et posons $\theta = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$.

Si π est une représentation lisse de G, pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on pose $\mathfrak{N}_{\theta,k}(x) = x\theta(x)\cdots\theta^{k-1}(x)$ ($x \in G$), $\omega_k = \omega \circ \mathfrak{N}_{\theta,k}$ — c'est un caractère de G, indépendant du choix de δ_1 —, et l'on note $\pi(k)$ la représentation $\omega_k^{-1}\pi^{\theta^k}$ de G. À isomorphisme près, $\pi(k)$ ne dépend pas du choix de δ_1 dans $G^\natural$. Pour $k \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$, on note $\pi(-k)$ la représentation lisse de G telle que $\pi(-k)(k) = \pi(0)$. Posant $\pi(0) = \pi$, on a $\pi(k)(k') = \pi(k+k')$ (k, $k' \in \mathbb{Z}$). Si π est irréductible et s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\pi(k) \simeq \pi$, on note $s(\pi)$ le plus petit entier $k \geq 1$ vérifiant cette propriété ; sinon on pose $s(\pi) = +\infty$.

Soit (Π, V) une ω–représentation lisse irréductible de $G^\natural$. La représentation $\pi = \Pi^\circ$ de G n'est en général pas irréductible (on l'a dit plus haut), ni même de type fini. Supposons qu'il existe une sous–représentation irréductible (π_0, V_0) de (π, V). Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons $V_k = \Pi(\delta_1)^{-k}(V_0)$; c'est un sous–espace G–stable de V. Puisque π_0 est irréductible, si $V_0 \cap V_k \neq 0$, alors $V_k = V_0$ et $\Pi(\delta_1)^k|_{V_0}$ est un isomorphisme de π_0 sur $\pi_0(k)$. Comme d'autre part Π est irréductible, les V_k ($k \in \mathbb{Z}$) engendrent V sur $\mathbb{C}$. On a donc deux cas possibles : ou bien $s(\pi_0) = +\infty$ et $V = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k$; ou bien $s(\pi_0) \neq +\infty$ et $V = \oplus_{k=0}^{s(\pi_0)-1} V_k$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons π_k la restriction de π à V_k. La restriction de $\Pi(\delta_1)^{-k}$ à V_0 induit un isomorphisme de $\pi_0(k)$ sur π_k. On en déduit que $s(\pi_k) = s(\pi_0)$. L'invariant $s(\pi_0)$ ne dépend donc pas du choix de π_0 — ni du choix de δ_1 comme on l'a dit plus haut ; on le note $s(\Pi)$. D'après ce qui précède, la représentation π de G est de type fini si et seulement si $s(\Pi) < +\infty$, et elle est est irréductible si et seulement si $s(\Pi) = 0$.

Supposons $s(\Pi) = +\infty$. Soit (Π', V') la ω–représentation lisse de $G^\natural$ définie par

$$\Pi'^\circ = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\pi_0(k)$$

et

$$\Pi'(\delta_1)((v_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = (v'_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \quad v'_k = v_{k+1}.$$

Alors l'application

$$(V_0)^{\mathbb{Z}} \rightarrow V,\ (v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Pi(\delta_1)^{-k}(v_k)$$

est un isomorphisme de (Π', V') sur (Π, V).

Supposons maintenant $s(\Pi) < +\infty$. Posons $s = s(\Pi)$. Soit (Π', V') la ω–représentation lisse de $G^\natural$ définie par

$$\Pi'^\circ = \oplus_{k=0}^{s-1}\pi_0(k)$$

et

$$\Pi'(\delta_1)(v_0, \ldots, v_{s-1}) = (v_1, \ldots, v_{s-1}, \Pi(\delta_1)^s(v_0)).$$

Alors l'application

$$(V_0)^s \to \oplus_{k=0}^{s-1} V_i,\ (v_0, \ldots, v_{s-1}) \mapsto \sum_{k=0}^{s-1} \Pi(\delta_1)^{-k}(v_k)$$

est un isomorphisme de (Π', V') sur (Π, V).

Récapitulons. Soit (Π, V) une ω–représentation lisse irréductible de G telle qu'il existe une sous–représentation irréductible π_0 de Π°. Alors l'invariant $s(\Pi) = s(\pi_0) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$ ne dépend pas de π_0 (il dépend seulement de la classe d'isomorphisme de Π), et on a

$$\Pi^\circ \simeq \begin{cases} \oplus_{k\in\mathbb{Z}} \pi_0(k) & \text{si } s(\Pi) = +\infty \\ \oplus_{k=0}^{s(\Pi)-1} \pi_0(k) & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier la représentation Π° est semisimple, et elle est de type fini (i.e. de longueur finie) si et seulement si $s(\Pi) < +\infty$.

Remarque. — On vient de voir que pour une ω–représentation lisse irréductible (Π, V) de $G^\natural$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

– il existe une sous–représentation irréductible de Π° ;

– la représentation Π° de G est semisimple.

On verra en A.4 que si une certaine propriété (P_2) du G–espace tordu $G^\natural$ est vérifiée (15), alors les deux conditions ci–dessus sont automatiquement satisfaites si Π° est admissible. Il est possible qu'elles le soient pour une classe beaucoup plus large de ω–représentations lisses irréductibles de $G^\natural$, au moins sous certaines hypothèses de finitude (par exemple s'il existe un entier $l \geq 1$ tel que $\theta^l = \mathrm{Int}_G(g)$ pour un élément $g \in G$, auquel cas on peut identifier $G^\natural$ à un sous–groupe de $(G \rtimes \langle\theta\rangle)/C$ comme en 3.4 ; où C est le sous–groupe distingué de $G \rtimes \langle\theta\rangle$ engendré par $g^{-1} \rtimes \theta^l$). Mais il semble vain d'espérer qu'elles le soient en général (16). ■

A.3. $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$**–modules et** $(\mathcal{H}^\natural_K, \omega)$**–modules.**— Notons $\mathcal{H}^\natural = \mathcal{H}(G^\natural)$ l'espace $C_c^\infty(G^\natural)$ muni de la structure de $\mathcal{H}$–bimodule donnée par ($f \in \mathcal{H}$, $\phi \in C_c^\infty(G^\natural)$, $\delta \in G^\natural$) :

$$f * \phi(\delta) = \int_G f(g)\phi(g^{-1}\cdot\delta)d_lg, \quad \phi * f(\delta) = \int_G \phi(\delta\cdot g)f(g^{-1})d_lg;$$

puisque $d_l(g^{-1}) = \Delta_G(g^{-1})d_lg$, on a aussi

$$\phi * f(\delta) = \int_G \phi(\delta\cdot g^{-1})f(g)\Delta_G(g^{-1})d_lg.$$

On appelle $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$*–module* un $\mathcal{H}$–module V muni d'une application

$$\mathcal{H}^\natural \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(V),\ \phi \mapsto (v \mapsto \phi\cdot v)$$

telle que

$$(f * \phi * f')\cdot v = f\cdot(\phi\cdot(\omega f'\cdot v)) \quad (\phi \in \mathcal{H}^\natural;\ f, f' \in \mathcal{H};\ v \in V).$$

15. On verra aussi (cf. A.6) que cette propriété (P_2) est toujours vérifiée si $G = \mathbf{G}(F)$ et $G^\natural = \mathbf{G}(F)$ pour un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur F et un $\mathbf{G}$–espace tordu défini sur F et possédant un point F–rationnel ; où F est un corps commutatif localement compact non archimédien.

16. On verra (A.3, et remarque 1 de A.4) qu'une ω–représentation lisse de $G^\natural$ n'est autre qu'un module (non dégénéré) V sur l'agèbre $\widetilde{\mathcal{H}}^\natural$ des polynômes de Laurent sur $\mathcal{H}$ tordus par un automorphisme $\theta_\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$, la représentation Π° de G correspondant au $\mathcal{H}$–module V. À moins d'imposer certaines conditions sur l'automorphisme $\theta_\mathcal{H}$, le fait que le $\widetilde{\mathcal{H}}^\natural$–module V soit simple n'implique pas qu'il soit semisimple comme $\mathcal{H}$–module.

Les $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–modules forment une sous–catégorie (non pleine) de la catégorie des $\mathcal{H}$–modules : un morphisme entre deux $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–modules V_1 et V_2 est simplement un morphisme de $\mathcal{H}$–modules $u : V_1 \to V_2$ tel que $u(\phi\cdot v) = \phi\cdot u(v)$ pour tout $\phi\in\mathcal{H}^\natural$ et tout $v\in V_1$.

Un $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–module V est dit *non dégénéré* si $\mathcal{H}^\natural\cdot V = V$ (puisque $\mathcal{H}^\natural = \mathcal{H} * \mathcal{H}^\natural$, le $\mathcal{H}$–module sous–jacent est lui aussi non dégénéré). Les $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–modules non dégénérés forment une sous–catégorie pleine de la catégorie des $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–modules. Notons qu'un morphisme entre deux $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–modules non dégénérés V_1 et V_2 est une application $\mathbb{C}$–linéaire $u : V_1\to V_2$ telle que $u(\phi\cdot v) = \phi\cdot u(v)$ pour tout $\phi\in\mathcal{H}^\natural$ et tout $v\in V_1$ (une telle application est automatiquement $\mathcal{H}$–linéaire). Si (Π, V) est une ω–représentation lisse de $G^\natural$, l'espace V est naturellement muni d'une structure de $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–module : pour $\phi\in\mathcal{H}^\natural$ et $v\in V$, on pose $\phi\cdot v = \Pi(\phi)(v)$, cf. 2.3. On vérifie que pour $f,\ f'\in\mathcal{H}$, on a $\Pi(f*\phi*f') = \pi(f)\circ\Pi(\phi)\circ\pi(\omega f')$, où l'on a posé $\pi = \Pi^\circ$. On obtient ainsi un isomorphisme entre :
– la catégorie des ω–représentations lisses de $G^\natural$;
– la catégorie des $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–modules non dégénérés.

Soit K un sous–groupe ouvert compact de G. On note $\mathcal{H}^\natural_K$ l'espace $C_c(K\backslash G^\natural/K)$ muni de la structure de $\mathcal{H}_K$–bimodule définie comme plus haut. En d'autres termes, on pose $\mathcal{H}^\natural_K = e_K*\mathcal{H}^\natural*e_K$. On a $\mathcal{H}^\natural_K = \mathcal{H}_K*\mathcal{H}^\natural_K = \mathcal{H}^\natural_K*\mathcal{H}_K$. Si de plus il existe un élément $\delta\in G^\natural$ normalisant K, i.e. tel que $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta)(K) = K$, alors $\mathcal{H}^\natural_K$ est un $\mathcal{H}_K$–module (à gauche ou à droite) libre de rang 1, engendré par la fonction caractéristique de $K\cdot\delta = \delta\cdot K$.

Supposons de plus que le caractère ω est trivial sur K. On appelle encore $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$*–module* un $\mathcal{H}_K$–module W muni d'une application

$$\mathcal{H}^\natural_K \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W),\ \phi\mapsto (w\mapsto \phi\cdot w)$$

telle que

$$(f*\phi*f')\cdot w = f\cdot(\phi\cdot(\omega f'\cdot w))\quad (\phi\in\mathcal{H}^\natural_K;\ f,\ f'\in\mathcal{H}_K;\ w\in W).$$

Les notions de morphismes entre deux $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$–modules et de $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$–module non dégénéré sont définies comme plus haut. Si (Π, V) est une ω–représentation lisse de $G^\natural$, l'espace V^K est naturellement muni d'une structure de $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$–module (celle déduite par restriction du $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–module V). Puisque $\mathcal{H}^\natural_K = \mathcal{H}^\natural_K * e_K$, on a $\mathcal{H}^\natural_K\cdot V = \mathcal{H}^\natural_K\cdot V^K$. Posons $\pi = \Pi^\circ$, et pour $\gamma\in G$, notons ϕ^K_γ la fonction caractéristique de $K\cdot\gamma\cdot K$ divisée par $\mathrm{vol}(K\cdot\gamma\cdot K, d_l\delta)$. Pour $v\in V$, on a

$$\phi^K_\gamma\cdot v = \pi(e_K)\circ\Pi(\gamma)\circ\pi(e_K)(v).$$

Remarque. — Si de plus il existe un élément $\delta\in G^\natural$ normalisant K, alors $\Pi(\delta)$ induit par restriction un automorphisme de V^K, qui coïncide avec $w\mapsto \phi^K_\delta\cdot w$. En ce cas on a l'égalité $\mathcal{H}^\natural_K\cdot V^K = V^K$, i.e. le $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$–module V^K est automatiquement non dégénéré. En général, on a seulement l'inclusion $\mathcal{H}^\natural_K\cdot V^K\subset V^K$. Notons que puisque $\mathcal{H}^\natural\cdot V = V$ et $\mathcal{H}^\natural = \bigcup_{K'}\mathcal{H}^\natural_{K'}$ où K' parcourt les sous–groupes ouverts compacts de $G^\natural$ tels que $\omega|_{K'} = 1$, on a toujours l'égalité $V = \bigcup_{K'}\mathcal{H}^\natural_{K'}\cdot V^{K'}$. ■

Continuons avec le sous–groupe ouvert compact K de G. On suppose toujours $\omega|_K = 1$. On suppose aussi qu'il existe un élément $\delta_1\in G^\natural$ normalisant K, et on pose $\theta = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$. Pour $f\in\mathcal{H}$, on note ${}^\theta f\in\mathcal{H}$ la fonction $f\circ\theta^{-1}$. Puisque $d_l\theta(g) = d_lg$, pour $f,\ f'\in\mathcal{H}$, on a ${}^\theta(f*f') = {}^\theta f*{}^\theta f'$, i.e. l'application $\mathcal{H}\to\mathcal{H},\ f\mapsto {}^\theta f$ est un automorphisme d'algèbres. Par restriction, on obtient un automorphisme d'algèbres $\mathcal{H}_K\to\mathcal{H}_K,\ f\mapsto {}^\theta f$. Pour $g\in G$, notons f^K_g la fonction caractéristique de KgK divisée par $\mathrm{vol}(K, d_lg)$. Puisque

$$\delta_1\cdot KgK = K\cdot\delta_1\cdot gK = K\theta(g)\cdot\delta_1\cdot K = K\theta(g)K\cdot\delta_1,$$

on a
$$\phi^K_{\delta_1} * f^K_g = \phi^K_{\delta_1\cdot g} = \phi^K_{\theta(g)\cdot\delta_1} = f^K_{\theta(g)} * \phi^K_{\delta_1}.$$
Par linéarité on obtient l'égalité
$$\phi^K_{\delta_1} * f = {}^\theta f * \phi^K_{\delta_1} \quad (f \in \mathcal{H}_K).$$
On en déduit qu'un $(\mathcal{H}^\natural_K, \omega)$–module W est non dégénéré si et seulement si l'application $w \mapsto \phi^K_{\delta_1} \cdot w$ est un automorphisme de W.

On suppose toujours $\omega|_K = 1$ et $\theta(K) = K$, où $\theta = \mathrm{Ind}_{G^\natural}(\delta_1)$. D'après ce qui précède, la donnée d'un $(\mathcal{H}^\natural_K, \omega)$–module W équivaut à celle d'un $(\mathcal{H}_K, \theta, \omega)$*–module* (W, θ_W), c'est–à–dire un $\mathcal{H}_K$–module W muni d'un $\mathbb{C}$–endomorphisme θ_W vérifiant l'égalité
$$\theta_W(\omega f \cdot w) = {}^\theta f \cdot \theta_W(v) \quad (f \in \mathcal{H}_W,\, w \in W).$$
On passe d'un point de vue à l'autre grâce à l'égalité $\theta_W(w) = \phi^K_{\delta_1} \cdot w$ $(w \in W)$, d'où les notions (évidentes) de morphismes entre deux $(\mathcal{H}_K, \theta, \omega)$–modules et de $(\mathcal{H}_K, \theta, \omega)$–module non dégénéré.

A.4. ω–représentations irréductibles de $G^\natural$ et $(\mathcal{H}^\natural_K, \omega)$–modules simples. — Si K est un sous–groupe ouvert compact de G tel que $\omega|_K = 1$, un $(\mathcal{H}^\natural_K, \omega)$–module non nul et non dégénéré W est dit *simple* si c'est un objet simple dans la catégorie des $\mathcal{H}^\natural_K$–modules non dégénérés, c'est–à–dire si le seul sous–$\mathcal{H}_K$–module non nul W' de W tel que $\mathcal{H}^\natural_K \cdot W' = W'$ est W lui–même — bien sûr, s'il existe un élément $\delta \in G^\natural$ normalisant K, alors la condition $\mathcal{H}^\natural_K \cdot W' = W'$ peut être remplacée par $\phi^K_\delta \cdot W' = W'$.

Considérons les propriétés (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) Il existe un système fondamental de voisinages de 1 dans G formé de sous–groupes ouverts compacts K de G tels que $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_K)(K) = K$ pour un élément $\delta_K \in G^\natural$.

(P_2) Il existe un élément $\delta_1 \in G^\natural$ et un système fondamental de voisinages de 1 dans G formé de sous–groupes ouverts compacts K de G tels que $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1)(K) = K$.

On a clairement l'implication $(\mathrm{P}_2) \Rightarrow (\mathrm{P}_1)$.

On suppose que la propriété (P_1) **est vérifiée**. Fixons un système fondamental de voisinages de 1 dans G, disons $\mathcal{K}$, formé de sous–groupes ouverts compacts K de G tels que $\omega|_K = 1$ et $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_K)(K) = K$ pour un $\delta_K \in G^\natural$.

Proposition 1. — *(En supposant* (P_1)*.)*

(1) *Une ω–représentation lisse* (Π, V) *de $G^\natural$ est irréductible si et seulement si $V \neq 0$ et pour tout $K \in \mathcal{K}$, le $(\mathcal{H}^\natural_K, \omega)$–module V^K est nul ou simple.*

(2) *Soit* (Π_1, V_1) *et* (Π_2, V_2) *deux ω–représentations lisses irréductibles de $G^\natural$, et $K \in \mathcal{K}$ tel que $V_i^K \neq 0$ pour $i = 1, 2$. Alors les ω–représentations Π_1 et Π_2 sont isomorphes si et seulement si les $(\mathcal{H}^\natural_K, \omega)$–modules V_1^K et V_2^K le sont.*

Démonstration. — Il s'agit de recopier celle de [**BZ**, prop. 2.10.(a)–(b)]. Soit (Π, V) une ω–représentation lisse de $G^\natural$, et soit $\pi = \Pi^\circ$. Soit $K \in \mathcal{K}$, et soit W' un sous–$\mathcal{H}_K$–module de V^K tel que $\mathcal{H}^\natural_K \cdot W' = W'$. Notons $V' = G^\natural \cdot W'$ le sous–espace de V engendré par les $\Pi(\delta)(w)$ pour $\delta \in G^\natural$ et $w \in W'$. Puisque $G^\natural = G \cdot \delta_K$ et $\Pi(\delta_K)(W') = W'$, V' est aussi le sous–espace $G \cdot W$ de V engendré par les $\pi(g)(w)$ pour $g \in G$ et $w \in W$, et on a $\Pi(\delta)(V') = V'$ pour tout élément $\delta \in G^\natural$. En d'autres termes, V' définit une sous–ω–représentation Π' de Π. De plus, comme $\mathcal{H}^\natural_K \cdot V' = V'^K$ est engendré par les $\phi^K_\delta \cdot w$ pour $\delta \in G^\natural$ et $w \in W$, on a l'égalité $V'^K = W'$.

Montrons (1). Supposons Π irréductible, et soit $K \in \mathcal{K}$ tel que $V^K \neq 0$. Soit W un sous–$\mathcal{H}_K$–module non nul de V^K tel que $\mathcal{H}_K^\natural \cdot W = W$. Le sous–espace $G^\natural \cdot W$ de V est non nul, et puisqu'il définit une sous–ω–représentation de Π, on a $G^\natural \cdot W = V$. Comme $(G^\natural \cdot W)^K = W$, on obtient $W = V^K$. Donc le $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$–module V^K est simple. Réciproquement, supposons qu'il existe un $K \in \mathcal{K}$ tel que le $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$–module V^K n'est ni nul ni simple. Alors il existe un sous–$\mathcal{H}_K$–module non nul W' de V^K, distinct de V^K, tel $\mathcal{H}_K^\natural \cdot W' = W'$. Le sous–espace $V' = G^\natural \cdot W$ de V définit une sous–ω–représentation non nulle de Π. Comme $V'^K = W'$, on a $V' \neq V$ et Π n'est pas irréductible. Cela achève la démonstration du point (1).

Montrons (2). Si les ω–représentations Π_1 et Π_2 sont isomorphes, alors les $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$–modules V_1^K et V_2^K le sont aussi. Réciproquement, supposons qu'il existe un isomorphisme de $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$–modules $u : V_1^K \to V_2^K$. Alors $W' = \{(w, u(w) : w \in V_1^K\}$ est un sous–$\mathcal{H}_K$–module non nul de $V_1^K \times V_2^K$ tel que $\mathcal{H}_K^\natural \cdot W' = W'$, et $V' = G^\natural \cdot W'$ est un sous–espace non nul de $V_1 \times V_2$ qui définit une sous–ω–représentation de $\Pi_1 \times \Pi_2$. Comme $V'^K = W'$, pour $i = 1, 2$, V' ne peut pas contenir V_i, ni être contenu dans V_i (car sinon W' contiendrait V_i^K, ou serait contenu dans V_i^K, ce qui est impossible). Puisque Π_1 et Π_2 sont irréductibles, pour $i = 1, 2$, la projection $V' \to V_i$ est un isomorphisme de $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–modules. Les ω–représentations Π_1 et Π_2 sont donc isomorphes. □

On suppose maintenant que la propriété (P_2) **est vérifiée**. Fixons un élément $\delta_1 \in G^\natural$ et un système fondamental de voisinages de 1 dans G, disons $\mathcal{K}_1$, formé de sous–groupes ouverts compacts K de G tels que $\omega|_K = 1$ et $\theta(K) = K$, où l'on a posé

$$\theta = \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1).$$

Tout $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–module V définit, pour chaque $K \in \mathcal{K}_1$, un $(\mathcal{H}_K, \theta, \omega)$–module (V^K, θ_{V^K}) : pour $w \in V^K$, on a $\theta_{V^K}(w) = \phi_{\delta_1}^K \cdot w$. De plus, la famille $\{(V^K, \theta_{V^K}) : K \in \mathcal{K}_1\}$ est compatible, au sens où si $v \in V^K \cap V^{K'}$ pour des K, $K' \in \mathcal{K}_1$, on a $\theta_{V^K}(v) = \theta_{V^{K'}}(v)$. Il suffit pour cela de choisir un $K'' \in \mathcal{K}_1$ tel que $K'' \subset K \cap K'$, et de remarquer que $\phi_{\delta_1}^{K''} * e_K = \phi_{\delta_1}^K$ et $\phi_{\delta_1}^{K''} * e_{K'} = \phi_{\delta_1}^{K'}$.

On définit comme en A.3 la notion de $(\mathcal{H}, \theta, \omega)$–*module non dégénéré*. D'après ce qui précède, la donnée d'un $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–module non dégénéré V équivaut à celle d'un $(\mathcal{H}, \theta, \omega)$–module non dégénéré (V, θ_V) : pour $v \in V$, on a $\theta_V(v) = \phi_{\delta_1}^K \cdot v$ pour tout $K \in \mathcal{K}_1$ tel que $v \in e_K \cdot V = V^K$.

Remarque 1. — Notons $\theta_{\mathcal{H}}$ le $\mathbb{C}$–automorphisme de $\mathcal{H}$ donné par

$$\theta_{\mathcal{H}}(f) = {}^{\theta}(\omega^{-1} f) \quad (f \in \mathcal{H}).$$

On vérifie que pour f, $f' \in \mathcal{H}$, on a

$$\theta_{\mathcal{H}}(\omega f * f') = {}^{\theta} f * \theta_{\mathcal{H}}(f').$$

En d'autres termes, $(\mathcal{H}, \theta_{\mathcal{H}})$ est un $(\mathcal{H}, \theta, \omega)$–module non dégénéré. D'ailleurs pour $K \in \mathcal{K}_1$, la restriction de $\theta_{\mathcal{H}}$ à $\mathcal{H}_K$ ($\subset \mathcal{H}^K = e_K * \mathcal{H}$) induit un $\mathbb{C}$–automorphisme de $\mathcal{H}_K$, disons $\theta_{\mathcal{H}_K}$, et $(\mathcal{H}_K, \theta_{\mathcal{H}_K})$ est un $(\mathcal{H}_K, \theta, \omega)$–module non dégénéré.

Notons aussi qu'un $\mathcal{H}^\natural$–module (non dégénéré) n'est autre qu'un module (non dégénéré) sur l'algèbre $\widetilde{\mathcal{H}}^\natural$ des polynômes de Laurent sur $\mathcal{H}$ tordus par l'automorphisme $\theta_{\mathcal{H}}$. ■

Remarque 2. — Si (Π, V) est une ω–représentation admissible de $G^\natural$, et si K est un sous–groupe ouvert compact de G tel que $V^K \neq 0$, alors puisque $\dim_{\mathbb{C}}(V^K) < +\infty$, il existe un sous–$\mathcal{H}_K$–module simple de V^K (i.e. le socle du $\mathcal{H}_K$–module V^K n'est pas nul). ■

Proposition 2. — *(En supposant* (P_2)*.) Soit $K \in \mathcal{K}_1$, et soit W un $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$–module non dégénéré simple tel que le socle du $\mathcal{H}_K$–module W n'est pas nul. Alors le $\mathcal{H}_K$–module W est semisimple, et il existe une ω–représentation lisse irréductible* (Π, V) *de $G^\natural$ telle que le $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$–module V^K est isomorphe à W. De plus, la représentation Π° de G est semisimple, et elle est de longueur finie (resp. irréductible) si et seulement si le $\mathcal{H}_K$–module W est de longueur finie (resp. simple).*

Démonstration. — Il s'agit d'adapter celle de [**BZ**, prop. 2.10.(c)]. Posons $\theta_W(w) = \phi_{\delta_1}^K \cdot w$ ($w \in W$) comme en A.3. Puisque W est simple, le seul sous–$\mathcal{H}_K$–module θ_W–invariant de W est W lui-même. Fixons un sous–espace non nul W_0 de W qui soit un $\mathcal{H}_K$–module simple, et pour $i \in \mathbb{Z}$, posons $W_i = \theta_W^i(W_0)$, où $\theta_W^i = \theta_W \circ \cdots \circ \theta_W$ (i fois) si $i \geq 0$ et $\theta_W^i = (\theta_W^{-1})^{-i}$ sinon. Chaque W_i est un sous–$\mathcal{H}_K$–module simple de W, et comme le sous–espace de W engendré par les W_i pour $i \in \mathbb{Z}$ est à la fois $\mathcal{H}_K$–stable et θ_W–invariant, c'est W tout entier. On distingue deux cas : ou bien $W_0 \cap W_i = \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$; ou bien il existe un plus petit entier $d \geq 1$ tel que $W_0 \cap W_d \neq \{0\}$, auquel cas $W_d = W_0$. Fixons un élément $w_0 \in W_0 \smallsetminus \{0\}$ et posons $\mathfrak{J}_{K,0} = \{f \in \mathcal{H}_K : f \cdot w_0 = 0\}$. C'est un idéal à gauche dans $\mathcal{H}_K$, et W_0 est isomorphe (comme $\mathcal{H}_K$–module) à $\mathcal{H}_K / \mathfrak{J}_{K,0}$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{J}_{K,i} = \theta_{\mathcal{H}}^i(\mathfrak{J}_{K,0})$ est encore un idéal à gauche dans $\mathcal{H}_K$, et W_i est isomorphe à $\mathcal{H}_K / \mathfrak{J}_{K,i}$. Notons $\mathcal{A}_i = \mathcal{H} * \mathcal{H}_K$ (resp. $\mathfrak{J}_i = \mathcal{H} * \mathfrak{J}_{K,i}$) l'idéal à gauche dans $\mathcal{H}$ engendré par $\mathcal{H}_K$ (resp. par $\mathfrak{J}_{K,i}$), et posons $\mathcal{A}'_i = \mathcal{A}_i / \mathfrak{J}_i$.

Plaçons–nous dans le premier cas : $W = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} W_i$. Notons $\mathcal{A}$ le $\mathcal{H}$–module $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_i$ (pour l'action diagonale de $\mathcal{H}$), et $\theta_{\mathcal{A}}$ le $\mathbb{C}$–automorphisme de $\mathcal{A}$ défini par $\theta_{\mathcal{A}}(\mathbf{f})_i = \theta_{\mathcal{H}}(\mathbf{f}_{i-1})$ pour tout $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$. Pour $f \in \mathcal{H}$ et $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$, on a

$$\theta_{\mathcal{A}}(\omega f \cdot \mathbf{f})_i = \theta_{\mathcal{H}}(\omega f \cdot \mathbf{f}_{i-1}) = {}^\theta f \cdot \theta_{\mathcal{A}}(\mathbf{f})_i.$$

En d'autres termes, $(\mathcal{A}, \theta_{\mathcal{A}})$ est un $(\mathcal{H}, \theta, \omega)$–module non dégénéré. Posons $\mathfrak{J} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{J}_i$. C'est un sous–$\mathcal{H}$–module $\theta_{\mathcal{A}}$–invariant de $\mathcal{A}$, et d'après le début de la démonstration de la proposition 1, on a $e_K \cdot \mathcal{A} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_K$ et $e_K \cdot \mathfrak{J} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{J}_{K,i}$. Par passage au quotient, $\theta_{\mathcal{A}}$ induit un $\mathbb{C}$–automorphisme $\theta_{\mathcal{A}'}$ de $\mathcal{A}' = \mathcal{A} / \mathfrak{J}$, et $(\mathcal{A}', \theta_{\mathcal{A}'})$ est un $(\mathcal{H}, \theta, \omega)$–module non dégénéré tel que $e_K \cdot \mathcal{A}' \simeq W$. On a $\mathcal{A}' = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}'_i$ et $\theta_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}'_{i-1}) = \mathcal{A}'_i$ ($i \in \mathbb{Z}$). Soit V'_0 un sous–$\mathcal{H}$–module de $\mathcal{A}'_0$ tel que le $\mathcal{H}$–module quotient $V_0 = \mathcal{A}'_0 / V'_0$ est simple (puisque $\mathcal{A}'_0 = \mathcal{H} \cdot f_0$ pour tout $f_0 \in e_K \cdot \mathcal{A}'_0$ tel que $f_0 \neq 0$, le $\mathcal{H}$–module $\mathcal{A}'_0$ est de type fini, et un tel V'_0 existe d'après le lemme de Zorn). Puisque le $\mathcal{H}_K$–module W_0 est simple, d'après la fin de la démonstration de [**BZ**, prop. 2.10], le $\mathcal{H}$–module (non dégénéré, simple) V_0 vérifie $e_K \cdot V'_0 = \{0\}$ et $e_K \cdot V_0 \simeq W_0$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on définit par récurrence un sous–$\mathcal{H}$–module V'_i de $\mathcal{A}'_i$ en posant $\theta_{\mathcal{A}'}(V'_{i-1}) = V'_i$. Soient $V' = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} V'_i$ et $V = \mathcal{A}' / V'$. Par construction, $\theta_{\mathcal{A}'}$ induit par passage au quotient un $\mathbb{C}$–automorphisme θ_V de V, et (V, θ_V) est un $(\mathcal{H}, \theta, \omega)$–module non dégénéré simple tel que $e_K \cdot V = W$.

Plaçons–nous maintenant dans le second cas : $W = \oplus_{i=0}^{d-1} W_i$ et $\theta_W^d(W_0) = W_0$. Notons θ_{W_0} la restriction de θ_W^d à W_0. On a défini en A.2 un caractère $\omega_d = \omega \circ \mathfrak{N}_d$ de G, où (rappel) $\mathfrak{N}_d : G \to G$ est l'application $x \mapsto x\theta(x) \cdots \theta^{d-1}(x)$. Ce caractère est trivial sur K, et l'on a

$$\theta_{W_0}(\omega_d f \cdot w) = {}^{\theta^d} f \cdot \theta_{W_0}(w) \quad (f \in \mathcal{H}_K,\, w \in W_0).$$

En d'autres termes, (W_0, θ_{W_0}) est un $(\mathcal{H}_K, \theta^d, \omega_d)$–module non dégénéré simple (puisque le $\mathcal{H}_K$–module W_0 est simple). Notons $\mathcal{A}$ le $\mathcal{H}$–module $\oplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{A}_i$ (pour l'action diagonale de $\mathcal{H}$), et $\theta_{\mathcal{A}}$ le $\mathbb{C}$–automorphisme de $\mathcal{A}$ défini par $\theta_{\mathcal{A}}(\mathbf{f})_i = \theta_{\mathcal{H}}(\mathbf{f}_{i-1})$ ($i = 0, \ldots, d-1$) pour tout $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_i)_{i=0}^{d-1}$; où l'on a posé $\mathbf{f}_{-1} = \mathbf{f}_{d-1}$. Pour $\mathbf{f} \in \mathcal{A}$, on a

$$\theta_{\mathcal{A}}(\omega f \cdot \mathbf{f})_i = \theta_{\mathcal{H}}(\omega f \cdot \mathbf{f}_{i-1}) = {}^\theta f \cdot \theta_{\mathcal{A}}(\mathbf{f})_i \quad (i = 0, \ldots, d-1),$$

i.e. $(\mathcal{A},\theta_{\mathcal{A}})$ est un $(\mathcal{H},\theta,\omega)$–module non dégénéré. De plus, $\theta_{\mathcal{A}}^d$ induit par restriction un $\mathbb{C}$–automorphisme $\theta_{\mathcal{A}_0}$ de $\mathcal{A}_0$ vérifiant

$$\theta_{\mathcal{A}_0}(\omega_d f * f') = {}^{\theta^d}f * \theta_{\mathcal{A}_0}(f') \quad (f,\, f'\in\mathcal{H}),$$

i.e. $(\mathcal{A}_0,\theta_{\mathcal{A}_0})$ est un $(\mathcal{H},\theta^d,\omega_d)$–module non dégénéré. Posons $\mathfrak{J}=\oplus_{i=0}^{d-1}\mathfrak{J}_i$. C'est un sous–$\mathcal{H}$–module $\theta_{\mathcal{A}}$–invariant de $\mathcal{A}$, et $\mathfrak{J}_0$ est un idéal $\theta_{\mathcal{A}_0}$–invariant de $\mathcal{A}_0$ $(=\mathcal{H}*\mathcal{H}_K)$. Soit $(\mathcal{A}'=\mathcal{A}/\mathfrak{J},\theta_{\mathcal{A}'})$ le $(\mathcal{H},\theta,\omega)$–module non dégénéré déduit de $(\mathcal{A},\theta_{\mathcal{A}})$ par passage au quotient. On a $\mathcal{A}'=\oplus_{i=0}^{d-1}\mathcal{A}'_i$ et $\theta_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}'_{i-1})=\mathcal{A}'_i$ $(i=0,\dots d-1)$, où l'on a posé $\mathcal{A}'_{-1}=\mathcal{A}'_{d-1}$. De même, soit $(\mathcal{A}'_0=\mathcal{A}_0/\mathfrak{J}_0,\theta_{\mathcal{A}'_0})$ le $(\mathcal{H},\theta^d,\omega_d)$–module non dégénéré déduit de $(\mathcal{A}_0,\theta_{\mathcal{A}_0})$ par passage au quotient. Comme dans le premier cas, on a $e_K\cdot\mathcal{A}'\simeq W$ et $e_K\cdot\mathcal{A}'_0\simeq W_0$, et il suffit de montrer qu'il existe un sous–$\mathcal{H}$–module $\theta_{\mathcal{A}'_0}$*–invariant* V'_0 de $\mathcal{A}'_0$ tel que le $(\mathcal{H},\theta^d,\omega_d)$–module $(V_0=\mathcal{A}'_0/V'_0,\theta_{V_0})$ déduit de $(\mathcal{A}'_0,\theta_{\mathcal{A}'_0})$ par passage au quotient est $\mathcal{H}$–simple et vérifie $e_K\cdot V_0\simeq W_0$. Soit V'_0 un sous–$\mathcal{H}$–module de $\mathcal{A}'_0$ tel que le $\mathcal{H}$–module quotient $V_0=\mathcal{A}'_0/V'_0$ est simple (cf. le premier cas) ; on a $e_K\cdot V'_0=\{0\}$ et $e_K\cdot V_0\simeq W_0$. Pour $i\in\mathbb{Z}$, posons $V'_i=\theta^i_{\mathcal{A}'_0}(V'_0)$. C'est un sous–$\mathcal{H}$–module de $\mathcal{A}'_0$ qui vérifie $e_K\cdot V'_i=\theta^i_{W_0}(e_K\cdot V'_0)=\{0\}$. Soit $V''_0=\sum_{i\in\mathbb{Z}}V'_i$ le sous–$\mathcal{H}$–module de $\mathcal{A}'_0$ engendré par les espaces V'_i pour $i\in\mathbb{Z}$. Il est $\theta_{\mathcal{A}'_0}$–invariant, et vérifie $e_K\cdot V''_0=\{0\}$. On a donc $V''_0\neq\mathcal{A}'_0$. Comme $V'_0\subset V''_0\subset\mathcal{A}'_0$ et $\mathcal{A}'_0/V'_0$ est $\mathcal{H}$–simple, on obtient $V''_0=V'_0$. Par conséquent le $\mathcal{H}$–module V'_0 est $\theta_{\mathcal{A}'_0}$–invariant, et $\theta_{\mathcal{A}'_0}$ induit par passage au quotient un $\mathbb{C}$–automorphisme θ_{V_0} de V_0 qui fait de (V_0,θ_{V_0}) un $(\mathcal{H},\omega,\theta)$–module non dégénéré. Reste à poser $V'=\oplus_{i=0}^{d-1}\theta^i_{\mathcal{A}'}(V'_0)\subset\mathcal{A}'$ et $V=\mathcal{A}'/V'$. Par construction, $\theta_{\mathcal{A}'}$ induit par passage au quotient un $\mathbb{C}$–automorphisme θ_V de V, et (V,θ_V) est un $(\mathcal{H},\theta,\omega)$–module non dégénéré simple tel que $e_K\cdot V=W$. □

Remarque 3. — (Sans supposer (P_2)). D'après la preuve de la proposition 2, si K est un sous–groupe ouvert compact de G normalisé par un élément de $G^\natural$, alors pour un $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$–module non dégénéré simple W (tout comme pour un $(\mathcal{H},\omega)$–module non dégénéré simple, cf. la remarque de A.2), les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- le socle du $\mathcal{H}_K$–module W n'est pas nul ;
- le $\mathcal{H}_K$–module W est semisimple. ■

Corollaire. — *(En supposant* (P_2)*.) Soit $K\in\mathcal{K}_1$. L'application $V\mapsto V^K$ induit une bijection entre :*

- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de ω–représentations lisses irréductibles* (Π,V) *de $G^\natural$ telles que $V^K\neq 0$ et la représentation Π° de G est semisimple ;*
- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$–modules non dégénérés simples et $\mathcal{H}_K$–semisimples.*

Cette bijection se restreint en une bijection entre :

- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de ω–représentations lisses G–irréductibles* (Π,V) *de $G^\natural$ telles que $V^K\neq 0$;*
- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$–modules non dégénérés $\mathcal{H}_K$–simples.*

Elle se restreint aussi en une bijection entre :

- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de ω–représentations (lisses) admissibles irréductibles* (Π,V) *de $G^\natural$ telles que $V^K\neq 0$;*
- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\mathcal{H}^\natural_K,\omega)$–modules non dégénérés simples et de dimension finie (sur $\mathbb{C}$).*

Remarque 4. — La démonstration du lemme de Schur donnée dans [**BZ**, 2.11] fonctionne aussi pour les ω–représentations lisses irréductibles de $G^\natural$ (sans supposer (P_2) ni (P_1)) : soit

(Π, V) une ω–représentation lisse irréductible de $G^\natural$. Si le groupe G est dénombrable à l'infini (c'est–à–dire réunion dénombrable de sous–ensembles compacts) alors on a

$$\mathrm{End}_{G^\natural}(\Pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}_V.$$

Si la propriété (P_1) est vérifiée, alors d'après la proposition 1, la conclusion reste vraie pour toutes les ω–représentations admissibles irréductibles de $G^\natural$ (sans supposer G dénombrable à l'infini). ■

A.5. Indépendance linéaire des caractères tordus. — Dans ce numéro, on suppose que la propriété la propriété (P_2) est vérifiée. Comme en A.4, on fixe un élément $\delta_1 \in G^\natural$ et un système fondamental de voisinages de 1 dans G, disons $\mathcal{K}_1$, formé de sous–groupes ouverts compacts K de G tels que $\omega|_K = 1$ et $\mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta_1)(K) = K$.

Notons que si Π_1, Π_2 sont deux ω–représentations lisses de $G^\natural$ telles que les représentations Π_1°, Π_2° de G sont irréductibles, alors on a $\mathrm{Hom}_{G^\natural}(\Pi_1, \Pi_2) = \mathrm{Hom}_G(\Pi_1^\circ, \Pi_2^\circ)$. La proposition de A.1 et son corollaire se généralisent de la manière suivante :

Proposition. — *(En supposant* (P_2)*.) Soit* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ *des ω–représentations admissibles G–irréductibles de $G^\natural$ telles que les représentations* $\Pi_1^\circ, \Pi_2^\circ, \ldots, \Pi_n^\circ$ *de G sont deux–à–deux non isomorphes. Alors les distributions* $\Theta_{\Pi_1}, \Theta_{\Pi_2}, \ldots, \Theta_{\Pi_n}$ *sur $G^\natural$ sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. — On reprend celle de [**BZ**, prop. 2.19]. Pour $i = 1, \ldots, n$, notons V_i l'espace de Π_i. Choisissons un groupe $K \in \mathcal{K}_1$ tel que pour $i = 1, \ldots, n$, on a $V_i^K \neq 0$. Les $\mathcal{H}_K$–modules V_i^K sont simples, de dimension finie, et deux–à–deux non isomorphes. Pour $i = 1, \ldots, n$, l'automorphisme $\Pi(\delta_1)$ de V_i^K induit par restriction un automorphisme A_i de V_i^K, qui coïncide avec la restriction de $\Pi_i(\phi_{\delta_1}^K)$ à V_i^K ; on a donc

$$\Theta_{\Pi_i}(\phi) = \mathrm{tr}(\Pi_i(\phi) \circ A_i) \quad (\phi \in \mathcal{H}_K).$$

On conclut grâce au théorème de Frobenius–Schur [**Bou**, ch. VIII, §13, prop. 2] : pour $i = 1, \ldots, n$, le choix d'une base de V_i sur $\mathbb{C}$ permet d'identifier $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i^K)$ à $\mathrm{M}_{d_i}(\mathbb{C})$. Pour $1 \leq k, l \leq d_i$, notons $u_{k,l}^i : \mathcal{H}_K \to \mathbb{C}$ l'application qui à $\phi \in \mathcal{H}_K$ associe le coefficient en la place (k, l) de l'endomorphisme $w \mapsto \phi \cdot w$ de V_i (vu comme un élément de $\mathrm{M}_{d_i}(\mathbb{C})$). Le théorème de Frobenius–Schur dit que les fonctions $u_{k,l}^i$ $(i = 1, \ldots, n,\ 1 \leq k, l \leq d_i)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$. □

Corollaire. — *(En supposant* (P_2)*.) Soit* Π_1, Π_2 *deux ω–représentations admissibles G–irréductibles de $G^\natural$. Alors Π_1 et Π_2 sont isomorphes si et seulement si* $\Theta_{\Pi_1} = \Theta_{\Pi_2}$.

A.6. La condition (P_2) pour $G^\natural = \mathbf{G}^\natural(F)$. — On reprend maintenant les hypothèses du chapitre 5 : $G = \mathbf{G}(F)$ et $G^\natural = \mathbf{G}^\natural(F)$ pour un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur F et un $\mathbf{G}$–espace tordu $\mathbf{G}^\natural$ défini sur F et possédant un point F-rationnel ; où F est un corps commutatif localement compact non archimédien.

Lemme. — *Le G–espace tordu $G^\natural$ vérifie* (P_2) *: il existe un élément $\delta_1 \in G^\natural$ et une base de voisinages de 1 dans G formée de sous–groupes ouverts compacts de G normalisés par δ_1.*

Démonstration. — Soit F^{nr} une extension non ramifiée maximale de F. Posons $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_F$ et notons $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$ l'anneau des entiers de F^{nr}. Rappelons que ϖ désigne une uniformisante de F. Fixons un élement $\delta \in G^\natural$. Notons Σ le groupe de Galois de l'extension F^{nr}/F, et fixons une chambre Σ–stable $\mathcal{C}$ de l'immeuble étendu $\mathfrak{I}^{\mathrm{nr}}$ de $\mathbf{G}(F^{\mathrm{nr}})$. Notons I^{nr} le stabilisateur de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{G}(F^{\mathrm{nr}})$. Par transport de structure, le F–automorphisme $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(\delta)$ de $\mathbf{G}$ induit un automorphisme de $\mathfrak{I}^{\mathrm{nr}}$, qui commute à l'action de Σ ; il envoie donc $\mathcal{C}$ sur une autre chambre Σ–stable de $\mathfrak{I}^{\mathrm{nr}}$, disons $\mathcal{C}'$. On sait que G opère transitivement sur l'ensemble des chambres Σ–stables de $\mathfrak{I}^{\mathrm{nr}}$. Soit donc un élément $g \in G$ tel que $g \cdot \mathcal{C}' = \mathcal{C}$. Posons $\delta_1 = g \cdot \delta$ et $\theta = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}^\natural}(\delta_1)$. Puisque $\theta(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, on a $\theta(I^{\mathrm{nr}}) = I^{\mathrm{nr}}$. On sait [**BT2**, 4.6.30, 5.1.30] que $I = (I^{\mathrm{nr}})^{\Sigma}$ est le groupe des points $\mathfrak{o}$–rationnels d'un $\mathfrak{o}$-schéma en groupes affine lisse (pas nécessairement connexe) $\mathfrak{G}$ de fibre générique $\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{o}} F = \mathbf{G}$, caractérisé à isomorphisme unique près par l'égalité $\mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}) = I^{\mathrm{nr}}$. Puisque $\theta(I^{\mathrm{nr}}) = I^{\mathrm{nr}}$, θ se prolonge de manière unique en un morphisme de $\mathfrak{o}$-schémas $u : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, qui est un isomorphisme de $\mathfrak{o}$-schéma en groupes.

Pour chaque entier $n \geq 1$, notons $\mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})^n$ le *n–ième sous–groupe de congruence de* $\mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})$, défini par

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})^n = \ker\{\pi_n : \mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}) \to \mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}/\varpi^n \mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})\},$$

où la π_n désigne l'application canonique (réduction modulo ϖ^n). D'après [**Y**, 2.8], il existe un $\mathfrak{o}$–schéma en groupes affine lisse $\mathfrak{G}^n$ de fibre générique $\mathfrak{G}^n \times_{\mathfrak{o}} F = \mathbf{G}$ tel que $\mathfrak{G}^n(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})^n$. De plus, l'égalité $\mathfrak{G}^n(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})^n$ caractérise $\mathfrak{G}^n$ à isomorphisme unique près, et pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on a $(\mathfrak{G}^n)^m = \mathfrak{G}^{n+m}$. Posons $u_n = u \times_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_n$, $\mathfrak{o}_n = \mathfrak{o}/\varpi^n\mathfrak{o}$. Pour $x \in \mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})$, on a $\pi_n(u(x)) = u_n(\pi_n(x))$. Par suite on a $\theta(\mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})^n) = \mathfrak{G}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})^n$ et $\theta(\mathfrak{G}^n(\mathfrak{o})) = \mathfrak{G}^n(\mathfrak{o})$. La famille $\mathcal{K}_1 = \{\mathfrak{G}^n(\mathfrak{o}) : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ est un système fondamental de voisinages de 1 dans G vérifiant les propriétés voulues. □

Remarque. — Pour $\Pi_1, \dots, \Pi_2$ comme dans l'énoncé de la proposition de A.5, on ne sait pas a priori si les fonctions caractères $\Theta_{\Pi_i} : G^\natural_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$ (sauf bien sûr si elles sont localement intégrables sur $G^\natural$). ■

Annexe B
Représentations l-modulaires

Dans cette annexe B, on décrit brièvement comment les résultats des ch. 2 et 5 s'étendent au cas des représentations à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur un corps de caractéristique l différente de la caractéristique résiduelle de F.

B.1. Généralités [V, ch. 1]. — Soit R un anneau commutatif, possédant une unité 1_R. On note $R^\times$ le groupe des éléments inversibles de R, et $d\mathbb{Z}$ l'idéal de $\mathbb{Z}$ noyau du morphisme canonique $\mathbb{Z} \to R$, $a \mapsto a1_R$. Ce morphisme se prolonge au sous–anneau $\mathcal{A}$ de $\mathbb{Q}$ engendré par les inverses des entiers premiers à d.

Si X est un td–espace, on note $C^\infty_{\mathrm{c}}(X, R)$ l'espace des fonctions sur X à valeurs dans R, qui sont localement constantes et à support compact, et l'on pose

$$C^\infty_{\mathrm{c}}(X, R)^* = \mathrm{Hom}_R(C^\infty_{\mathrm{c}}(X, R), R).$$

Les éléments de $C^\infty_{\mathrm{c}}(X, R)^*$ sont appelés *R–distributions* sur X.

Soit G un groupe localement profini. On appelle *R–caractère* de G un morphisme de groupes $G \to R^\times$ dont le noyau contient un sous–groupe ouvert.

Une *R–mesure de Haar* à gauche sur G est par définition une distribution non nulle sur G invariante pour l'action de G opérant sur lui–même par translations à gauche. On sait qu'une telle mesure existe si et seulement s'il existe un sous–groupe ouvert compact K de G dont le pro–ordre est premier à d, auquel cas cette mesure est unique à multiplication près par un élément de $R^\times$. On suppose désormais qu'il existe une R–mesure de Haar à gauche sur G, et l'on en fixe une μ_G. On note $\Delta_{G,R} : G \to R^\times$ le *R–module de G*, c'est–à–dire le R–caractère défini comme en 2.1 par

$$\int_G f(gx^{-1})d\mu_G(g) = \Delta_{G,R}(x)\int_G f(g)d\mu_G(g) \quad (f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G, R),\, x \in G).$$

Alors $\Delta_{G,R}^{-1}\mu_G$ est une R–mesure de Haar à droite sur G, et on les obtient toutes de cette manière.

Remarque. — Le module $\Delta_G(x)$ d'un élément $x \in G$ est un indice généralisé : pour tout sous–groupe ouvert compact K de G, on a

$$\Delta_G(x) = \frac{[K : K \cap xKx^{-1}]}{[xKx^{-1} : K \cap xKx^{-1}]} = \frac{[K : K \cap xKx^{-1}]}{[K : x^{-1}Kx \cap K]}.$$

En choisissant K de pro–ordre premier à d, on voit que $\Delta_G(x)$ appartient à l'anneau $\mathcal{A}$. Son image dans R appartient à $R^\times$: c'est le R–module $\Delta_{G,R}(x)$. ■

Soit H un sous–groupe fermé de G. Alors il existe une mesure de Haar à gauche sur H, et une mesure de Haar à droite sur l'espace quotient $H\backslash G$, c'est–à–dire une forme linéaire non nulle sur $\boldsymbol{S}(H\backslash G, R)$, invariante pour l'action de G sur $H\backslash G$ par translations à droite ; où $\boldsymbol{S}(H\backslash G, R)$ désigne, comme en 2.1, l'espace des fonctions $f : H\backslash G \to R$ qui sont uniformément localement constantes à droite, à support compact modulo H, et vérifient

$$f(hg) = \Delta_{G,R}(h)\Delta_{H,R}(h)^{-1}f(h) \quad (h \in H,\, g \in G).$$

Soit θ un automorphisme de G. On définit le R–module $\Delta_{G,R}(\theta) \in R^\times$ comme en 2.1. D'après le lemme de 2.1, on a $\Delta_{G,R} = \Delta_{G,R} \circ \theta$, et s'il existe une partie ouverte compacte θ–stable Ω de G telle que $\mathrm{vol}(\Omega, \mu_G) \neq 0$, alors $\Delta_{G,R}(\theta) = 1$. Si H est un sous–groupe fermé θ–stable de G, on définit le R–module $\Delta_{H\backslash G,R}(\theta)$ comme en 2.1. La relation $(*)$ de 2.1 est vraie pour les R–modules.

B.2. R–représentations lisses. — On appelle *R–représentation lisse* de G la donnée d'un R–module V et d'un morphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{Aut}_R(V)$ tel que le stabilisateur de v dans G est ouvert, pour tout $v \in V$. Comme pour les représentations complexes, on a les notions de R–représentation (lisse) admissible, irréductible, semisimple, de type fini, de longueur finie. Si R est un corps, alors pour toute R–représentation admissible π, on définit comme en 2.2 le caractère–distribution $\Theta_\pi = \mathrm{tr}(\pi) : C_\mathrm{c}^\infty(G, R) \to R$ (il dépend du choix de la mesure de Haar μ sur G). Si R est un corps algébriquement clos, la proposition de A.1 reste vraie : les caractères–distributions des représentations admissibles irréductibles de G sont linéairement indépendants sur R.

Soit $G^\natural$ un G–espace tordu, et soit ω un R–caractère de G. On définit le R–module de $G^\natural$ comme en 2.5 : pour $\gamma \in G^\natural$, on pose

$$\Delta_{G^\natural,R}(\gamma) = \Delta_{G,R}(\mathrm{Int}_{G^\natural}(\gamma)^{-1}).$$

Le lemme de 2.5 est vrai pour les R–modules. On définit la notion de (ω, R)–représentation lisse de $G^\natural$ comme en 2.6, en remplaçant $\mathbb{C}$ par R. La catégorie des (ω, R)–représentations lisses de $G^\natural$ est notée $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega, R)$.

Soit H un sous–groupe fermé de G, et $H^\natural$ un H–espace tordu qui soit un sous–espace topologique tordu de $G^\natural$. On définit comme en 2.7 un foncteur induction compacte (lisse)

$${}^\omega\mathrm{ind}_{H^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(H^\natural, \omega, R) \to \mathfrak{R}(G^\natural, \omega, R).$$

On suppose désormais que l'anneau R est un corps, de caractéristique l. On a donc $d = l$. Pour toute partie ouverte compacte Ω de G telle que l'ensemble $H \cap \Omega$ est non vide et de pro–ordre premier à l, on définit l'endomorphisme $\phi \mapsto \phi|_\Omega$ de $C_\mathrm{c}^\infty(G^\natural, R)$ comme en 2.8. La proposition de 2.8 reste vraie pour les (ω, R)–représentations de $G^\natural$ pourvu que K soit de pro–ordre premier à l. En effet, fixé un sous–groupe ouvert compact K de G de pro–ordre premier à l, tel que $HK = KH$, et un système de représentants $\{x_1 = 1, x_2, \ldots, x_n\}$ de

$HK\backslash G$ dans G, la partie ouverte compacte $\Omega' = \bigcup_{i=1}^n Kx_i$ de G vérifie $H\cap\Omega' = H\cap K$. Puisque le pro–ordre de $H\cap\Omega'$ divise celui de K, il est premier à l.

B.3. Le principe de submersion d'Harish–Chandra. — Reprenons les hypothèses et les notations du chapitre 5. Soit p la caractéristique résiduelle de F. Puisqu'on a supposé qu'il existe un sous–groupe ouvert compact de G dont le pro–ordre est premier à l, on a $l\neq p$. Puisque l peut diviser le pro–ordre du sous–groupe compact maximal $K_\circ$ de G, on ne peut normaliser les mesures de Haar comme en 5.2. Le théorème de 5.8 et son corollaire restent vrais, pourvu que le sous–groupe ouvert compact définissant les opérateurs T_γ soit de pro–ordre premier à l :

Théorème. — *Soit* Π *une* (ω,R)*–représentation admissible de* $G^\natural$ *telle que la* R*–représentation* Π° *de* G *est de type fini, et soit* K *un sous–groupe ouvert compact de* G *dont le pro–ordre est premier à* l*. Le caractère-distribution* $\Theta_\Pi = \mathrm{tr}(\Pi)$ *de* Π *est représenté sur* $G^\natural_{\mathrm{qr}}$ *par la fonction localement constante* $\gamma\mapsto\Theta_\Pi(\gamma)=\mathrm{tr}(\mathrm{T}_\gamma)$*, où l'on a posé*

$$\mathrm{T}_\gamma = \mathrm{vol}(K,\mu_G)^{-1}\int_K \omega(k)^{-1}\Pi(k^{-1}\cdot\gamma\cdot k)d\mu_G(k).$$

B.4. Induction parabolique et restriction de Jacquet. — Pour $P^\natural\in\mathcal{P}^\natural_\circ$, on définit le foncteur induction parabolique *non normalisé*

$$^\omega\underline{i}_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural,\omega,R)\to\mathfrak{R}(G^\natural,\omega,R)$$

comme en 5.9, en supprimant le facteur $\delta_{P^\natural}^{1/2}$. On définit aussi le foncteur de Jacquet *non normalisé*

$$^\omega\underline{r}_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural,\omega,R)\to\mathfrak{R}(M_P^\natural,\omega,R)$$

comme en 5.10, en supprimant le facteur $\delta_{P^\natural}^{-1/2}$.

Remarque 1. — Pour $\delta\in P^\natural$, le module $\Delta_{P^\natural}(\delta)=\delta_{P^\natural}(\delta)^{-1}$ appartient à $\mathbb{Z}[1/q]$, où q est le cardinal du corps résiduel de F. Si l'image de q dans R a une racine carrée dans R (par exemple si R est algébriquement clos), on en choisit une ; cela permet de définir le R–caractère $\delta_{P^\natural}^{1/2}$ de $P^\natural$, et les foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet *normalisés* pour les (ω,R)–représentations lisses. ■

Choisissons un sous–groupe ouvert $J_\circ$ de $K_\circ$, de pro–ordre premier à l, tel que pour tout $P\in\mathcal{P}_\circ$, on a la décomposition triangulaire

$$J_\circ = (J_\circ\cap U_{P^-})(J_\circ\cap M_P)(J_\circ\cap U_P).$$

Un tel $J_\circ$ existe, d'après la remarque 4 de 5.6. On suppose désormais que les R–mesures de Haar à gauche μ_G, μ_{M_P}, μ_{U_P}, μ_P sur G, M_P, U_P, P sont celles normalisées par $J_\circ$, c'est–à–dire telles que $\mathrm{vol}(J_\circ,\mu_G)=1$, $\mathrm{vol}(M_P\cap J_\circ,\mu_{M_P})=1$, etc..

Soit $P^\natural\in\mathcal{P}^\natural_\circ$. Choisissons un système de représentants $\{x_1,\ldots,x_n\}$ dans $K_\circ$ de l'espace quotient $PJ_\circ\backslash G$ tel que $1\in\{x_1,\ldots,x_n\}$, et posons $\Omega=\coprod_{i=1}^n J_\circ x_i$. Alors $\Omega\cap P = J_\circ\cap P$ est de pro–ordre premier à l. On note

$$C_{\mathrm{c}}^\infty(G^\natural,R)\to C_{\mathrm{c}}^\infty(M_P^\natural,R),\ \phi\mapsto {}^\omega\phi_{P^\natural,J_\circ}$$

l'application linéaire définie par

$$^\omega\phi_{P^\natural,J_\circ}(\delta) = \iint_{U_P\times J_\circ}\omega(k)\phi(k^{-1}\cdot\delta\cdot uk)d\mu_{U_P}(u)d\mu_G(k)\quad(\delta\in M_P^\natural).$$

Soit Σ une (ω, R)–représentation admissible de $M_P^\natural$, et $\Pi = {}^\omega\underline{\iota}_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)$. Alors Π est une (ω, R)–représentation admissible de $G^\natural$, et pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G^\natural, R)$, on a la formule de descente (théorème de 5.9)

$$\Theta_\Pi(\phi) = \Theta_\Sigma({}^\omega\phi_{P^\natural, J_\circ}).$$

Remarque 2. — Nous n'essaierons pas de traduire ici l'égalité ci-dessus en termes de fonctions caractères (corollaire 3 de 7.3). Notons d'ailleurs que si Σ° est de type fini, on ne sait pas si Π° l'est aussi, même si R est algébriquement clos. On sait en revanche, si R est algébriquement clos, qu'une représentation admissible de type fini est de longueur finie [**V**, ch. II, 5.10], et que les foncteurs induction parabolique $\underline{\iota}_P^G : \mathfrak{R}(M_P, R) \to \mathfrak{R}(G, R)$ et restriction de Jacquet $r_G^P : \mathfrak{R}(G, R) \to \mathfrak{R}(M_P, R)$ préservent la propriété d'être de longueur finie [**V**, ch. II, 5.14]. ■

Soit Π une (ω, R)-représentation admissible de $G^\natural$ telle que Π° est de type fini, et soit $\Sigma = {}^\omega\underline{r}_{G^\natural}^{P^\natural}(\Pi)$. D'après [**V**, 3.2, 3.3], le premier lemme de Jacquet est vrai (cf. la démonstration du lemme 2 de 5.10), et Σ est admissible. De plus Σ° est encore de type fini, et pour $\gamma \in M_P^\natural \cap G_{\mathrm{qr}}^\natural$ tel que $P_{[\gamma]} = P$ et $A(\gamma) = A_P$, on a l'égalité (théorème de 5.10)

$$\Theta_\Pi(\gamma) = \Theta_\Sigma(\gamma).$$

B.5. Commentaires. — Pour $\theta = \mathrm{id}$ et $\omega = 1$, Meyer et Solleveld [**MS**] ont récemment obtenu le théorème de B.3 par une méthode différente de celle d'Harish–Chandra, utilisant des systèmes de coefficients sur l'immeuble de Bruhat–Tits. Leur résultat est d'ailleurs plus fort puisqu'ils contrôlent le voisinage d'un élément semisimple régulier de G sur lequel la fonction caractère d'une R–représentation admissible de longueur finie de G est constant.

Il est probablement possible d'étendre une partie du ch. 6 aux (ω, R)–représentations de $G^\natural$, du moins pour celles dont les coefficients sont à support compact modulo le centre, et en supposant R algébriquement clos (lemme de Schur, degré formel, etc.).

Annexe C
Action d'un groupe algébrique et points rationnels

Dans cette annexe C, on s'intéresse à l'action d'un groupe localement profini G sur un espace totalement discontinu X, et plus particulièrement au cas où cette action provient par passage aux points F–rationnels d'une action algébrique définie sur un corps commutatif localement compact non archimédien F. On reprend ici les résultats de Bernstein–Zelevinski [**BZ**, §6, Appendix], en particulier le théorème de constructibilité. Grâce aux techniques de loc. cit., on obtient un résultat nouveau (proposition de C.11). On rappelle aussi certains résultats plus récents de Moret–Bailly, Gabber et Gille [**MB2, GGMB**].

C.1. Rappels topologiques. — Soit X un espace topologique, et Y un sous–ensemble de X. Notons $\overline{Y}$ la fermeture de Y (dans X). Rappelons que Y est dit *localement fermé (dans X)* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

– Y est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de X ;
– Y est ouvert dans $\overline{Y}$;
– Y est fermé au voisinage de chacun de ses points (dans X).

Notons $\mathcal{U}(Y) = \mathcal{U}_X(Y)$ l'ensemble des $y \in Y$ tels que Y est fermé au voisinage de y (dans X). C'est un sous–ensemble localement fermé de X, ouvert dans Y, et Y est localement fermé si et seulement si $\mathcal{U}(Y) = Y$.

On définit par récurrence une suite

$$Y = Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots \supset Y_k \supset \cdots$$

de sous–ensembles fermés de Y : on pose $Y_1 = Y \smallsetminus \mathcal{U}(Y)$ et $Y_k = (Y_{k-1})_1$. On dit que Y est *constructible (dans X)* si Y est union d'un nombre fini de sous–ensembles localement fermés. D'après [**BZ**, 6.7], si Y est constructible, alors il existe un plus petit entier $k \geq 1$ tel que $Y_k = \emptyset$, et Y s'écrit

$$Y = \mathcal{U}(Y) \cup \mathcal{U}(Y_1) \cup \cdots \cup \mathcal{U}(Y_{k-1}).$$

De plus, $\mathcal{U}(Y)$ est dense dans Y. Inversement, s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $Y_k = \emptyset$, alors Y est constructible.

C.2. Actions régulières, localement régulières, et constructibles. — Soit X un td–espace muni d'une action continue d'un groupe topologique localement profini G. On note

$$\alpha : G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto \alpha(g, x) = g \cdot x$$

cette action, $G\backslash X$ l'ensemble des G–orbites dans X, et $\rho : X \to G\backslash X$ la projection canonique. On munit $G\backslash X$ de la topologie quotient : un sous–ensemble $\widetilde{Y}$ de $G\backslash X$ est ouvert si et seulement si $\rho^{-1}(\widetilde{Y})$ est ouvert dans X. Cela fait de ρ une application continue ouverte. Notons que $G\backslash X$ n'est pas nécessairement *séparé* (au sens de Hausdorff), mais puisque ρ envoie tout compact de X sur un quasi–compact de $G\backslash X$, chaque point de $G\backslash X$ possède une base de voisinages ouverts quasi–compacts.

D'après [**BZ**, lemma 6.4], les conditions suivantes sont équivalentes :

– l'action α est *régulière* au sens où son graphe

$$\mathcal{G}_X^\alpha = \{(x, g \cdot x) : x \in X,\ g \in G\} \subset X \times X$$

est fermé dans $X \times X$;

– la diagonale

$$\Delta_{G\backslash X} = \{(\tilde{x}, \tilde{x}) : \tilde{x} \in G\backslash X\} \subset G\backslash X \times G\backslash X$$

est fermée dans $G\backslash X \times G\backslash X$;

– l'espace topologique $G\backslash X$ est séparé.

Remarque 1. — Si l'action α est régulière, toutes les G–orbites dans X sont fermées, et $G\backslash X$ est un td–espace. Notons que pour que l'action α soit régulière, il faut et il suffit que chaque point de x possède un voisinage ouvert fermé et G–invariant sur lequel elle est régulière. ■

Exemple. — Si G est un sous–groupe fermé d'un groupe topologique localement profini H, l'ensemble des classes $G\backslash H$ muni de la topologie quotient est un td–espace, et la projection canonique $H \to G\backslash H$ est ouverte [**BZ**, cor. 6.5]. En effet, on pose $X = H$ et pour α on prend l'action de G sur H donnée par la multiplication à gauche. Le graphe

$$\mathcal{G}_H^\alpha = \{(h, h') \in H \times H : h'h^{-1} \in G\}$$

est fermé dans $H \times H$, d'où le résultat. ■

Soit un élément $\tilde{x} \in G\backslash X$ tel que la diagonale $\Delta_{G\backslash X}$ est fermée au voisinage de $(\tilde{x}, \tilde{x})$ dans $G\backslash X \times G\backslash X$. Choisissons un voisinage ouvert $\widetilde{U}$ de $\tilde{x}$ dans $G\backslash X$ tel que $\Delta_{G\backslash X} \cap (\widetilde{U} \times \widetilde{U})$ est fermé dans $\widetilde{U} \times \widetilde{U}$. Posons $U = \rho^{-1}(\widetilde{U})$. C'est un ouvert (non vide) G–invariant de X sur lequel l'action α est régulière : le graphe

$$\mathcal{G}_U^\alpha = \{(x, g \cdot x) : x \in U,\ g \in G\} = \mathcal{G}_X^\alpha \cap (U \times U)$$

est fermé dans $U \times U$. Réciproquement, si la restriction de α à un ouvert G–invariant U de X est régulière, alors la diagonale $\Delta_{G\backslash U} = \Delta_{G\backslash X} \cap (\rho(U) \times \rho(U))$ est fermée dans $\rho(U) \times \rho(U)$. On en déduit que les conditions suivantes sont équivalentes :

– l'action α est *localement régulière* au sens où son graphe $\mathcal{G}_X^\alpha$ est localement fermé dans $X \times X$;
– la diagonale $\Delta_{G\backslash X}$ est localement fermée dans $G\backslash X \times G\backslash X$.

Remarque 2. — Si l'action α est localement régulière, alors toutes les G–orbites dans X sont fermées, i.e. $G\backslash X$ est un espace *de Fréchet*. En effet, si Y est une G–orbite dans X, et si x appartient à $\overline{Y} \smallsetminus Y$ où $\overline{Y}$ désigne la fermeture de Y dans X, alors α ne peut pas être régulière au voisinage de x. ■

D'après [**BZ**, prop. 6.8], les conditions suivantes sont équivalentes :

– l'action α est *constructible* au sens où son graphe $\mathcal{G}_X^\alpha$ est constructible dans $X \times X$;
– la diagonale $\Delta_{G\backslash X}$ est constructible dans $G\backslash X \times G\backslash X$.

Si l'action α est constructible, on a (loc. cit.) :

– si X est non vide, alors il existe un sous–ensemble ouvert non vide et G–invariant U de X sur lequel l'action α est régulière ;
– toutes les G–orbites dans X sont localement fermées.

C.3. Rappels sur la topologie définie par F. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien [17], et soit $\mathbf{X}$ une variété algébrique (a priori ni affine ni lisse) définie sur F, identifiée comme dans le ch. 3 à l'ensemble de ses points $\overline{F}$–rationnels pour une clôture algébrique $\overline{F}$ de F. Comme en 4.1 on note F^{sep}/F la sous–extension séparable maximale de F dans $\overline{F}$, et $\Sigma = \Sigma(F^{\mathrm{sep}}/F)$ son groupe de Galois.

La variété $\mathbf{X}$ étant définie sur F, elle est munie d'une *F–structure* [18] et en particulier d'une *F–topologie* moins fine que la topologie de Zariski, cf. [**Bor**, ch. AG, 11.3]. Rappelons qu'une partie fermée de $\mathbf{X}$ est *F–fermée* si et seulement si elle est définie sur $F^{p^{-\infty}}$. En particulier, la F–topologie et la $F^{p^{-\infty}}$–topologie sur $\mathbf{X}$ coïncident. On munit l'ensemble $X = \mathbf{X}(F)$ des points F–rationnels de $\mathbf{X}$ de la topologie définie par F :

– pour tout F–ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathbf{X}$, l'ensemble $\mathbf{U}(F) = \mathbf{U} \cap X$ des points F–rationnels de $\mathbf{U}$ est ouvert dans X ;
– si $\mathbf{X}$ est affine, la topologie sur X est celle définie en 4.1.

Cela fait de X un td–espace.

Pour déterminer si une partie de $\mathbf{X}$ est F–ouverte (resp. F–fermée), on dispose du critère galoisien habituel. L'action de Σ sur F^{sep} s'étend de manière unique en une action sur $\overline{F}$, et on définit comme dans [**Bor**, ch. AG, 14.3] une action de Σ sur $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\overline{F})$ — qui d'ailleurs

17. Le cas d'un corps localement compact non archimédien est celui qui nous intéresse ici. Signalons cependant que la plupart des énoncés ci–dessous s'étendent au cas d'un corps valué hensélien F tel que le complété $\widehat{F}$ de F est une extension séparable de F (cf. [**MB1, MB2**]).

18. Rappelons que si $\mathbf{X}$ est affine, la F–structure sur $\mathbf{X}$ est donnée par une sous–F–algèbre $F[\mathbf{X}]$ de l'algèbre affine $\overline{F}[\mathbf{X}]$ de $\mathbf{X}$ telle que $\overline{F} \otimes_F F[\mathbf{X}] = \overline{F}[\mathbf{X}]$. En ce cas, les parties F–fermées de $\mathbf{X}$ correspondent aux idéaux I de $F[\mathbf{X}]$ tels que la F–algèbre $F[\mathbf{X}]/I$ est réduite. Soit $\mathbf{Z}$ est une partie F–fermée de $\mathbf{X}$. Notons $F[\mathbf{Z}]$ la restriction de $F[\mathbf{X}]$ à $\mathbf{Z}$ — c'est une F–algèbre réduite — et $F(\mathbf{Z})$ son anneau des fractions. Ce dernier est un produit (fini) d'extensions du corps F, et on a le critère suivant [**Bor**, ch. AG, 12.1] : la sous–variété $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{X}$ est définie sur F si et seulement si la $\overline{F}$–algèbre $\overline{F} \otimes_F F(\mathbf{Z})$ est réduite — ou, ce qui revient au même d'après [**Bor**, ch. AG, 2.2], si et seulement $F(\mathbf{Z})$ est un produit d'extensions séparables de F. Ce critère s'étend naturellement au cas où la variété $\mathbf{X}$ n'est pas affine [**Bor**, ch. AG, 12.2].

prolonge celle définie dans loc. cit. sur $\mathbf{X}(F^{\mathrm{sep}})$. D'après [**BZ**, lemma A.4], une partie ouverte (resp. fermée) de $\mathbf{X}$ est F–ouverte (resp. F–fermée) si et seulement si elle est Σ–stable. On en déduit (loc. cit.) que pour toute partie $\mathcal{X}$ de $\mathbf{X}(F)$, la fermeture $\overline{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{X}$ pour la topologie de Zariski est une sous–variété fermée de $\mathbf{X}$ définie sur F.

Soit $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux variétés algébriques définies sur F. Le produit $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ est une variété algébrique définie sur F [**Bor**, ch. AG, 12.4], et $(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})(F)$ est naturellement homéomorphe à $X\times Y$, où l'on a posé $X=\mathbf{X}(F)$ et $Y=\mathbf{Y}(F)$. D'autre part, tout F–morphisme — i.e. morphisme défini sur F — de variétés algébriques $\alpha:\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ induit, par passage aux points F–rationnels, une application continue $\alpha_F:Y\to X$.

Exemple. — Soit $\mathbf{X}$ une variété algébrique définie sur F, et $\mathbf{H}$ un groupe algébrique affine défini sur F. On suppose que $\mathbf{X}$ est muni d'une action algébrique (à gauche) de $\mathbf{H}$ elle aussi définie sur F, c'est–à–dire d'un F–morphisme

$$\alpha:\mathbf{H}\times\mathbf{X}\to\mathbf{X},\ (h,x)\mapsto\alpha(h,x)=h\cdot x$$

Posons $X=\mathbf{X}(F)$ et $H=\mathbf{H}(F)$. Rappelons que le groupe H (muni de la topologie définie par F) est localement profini. Par passage aux points F–rationnels, on obtient une action continue

$$\alpha_F:(\mathbf{H}\times\mathbf{X})(F)=H\times X\to X.$$

dont le graphe $\mathcal{G}_X^{\alpha_F}$ est naturellement homéomorphe à l'image de $(\mathbf{H}\times\mathbf{X})(F)$ par l'application γ_F, où γ désigne le F–morphisme $\mathbf{H}\times\mathbf{X}\to\mathbf{X}\times\mathbf{X}$, $(h,x)\mapsto(x,h\cdot x)$. ■

C.4. Le théorème de constructibilité. — Le résultat suivant [**BZ**, theorem A.2] est la version ϖ–adique du théorème de constructibilité de Chevalley [**Bor**, ch. AG, cor. 10.2].

Théorème. — *Soit $\alpha:\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ un F–morphisme de variétés algébriques définies sur F. L'image $\alpha_F(\mathbf{Y}(F))$ est constructible dans $\mathbf{X}(F)$.*

Remarques. — (1) D'après [**BZ**, A.5], le théorème est impliqué par le résultat plus faible suivant : *il existe une sous–variété F–ouverte non vide $\mathbf{U}$ de $\mathbf{Y}$ telle que l'image $\alpha_F(\mathbf{U}(F))$ est constructible dans $\mathbf{X}(F)$*. En effet, posons $\mathcal{Y}=\mathbf{Y}(F)\smallsetminus\mathbf{U}(F)$. D'après C.3, la fermeture $\mathbf{Z}=\overline{\mathcal{Y}}$ de $\mathcal{Y}$ dans $\mathbf{Y}$ pour la topologie de Zariski est une sous–variété fermée de $\mathbf{Y}$ définie sur F, vérifiant $\mathbf{Z}(F)=\mathcal{Y}$. Puisque $\mathbf{Y}$ est un espace topologique nœtherien, on peut par induction supposer que $\alpha_F(\mathbf{Z}(F))$ est constructible dans $\mathbf{X}(F)$. Comme $\mathbf{Y}(F)\smallsetminus\mathbf{Z}(F)=\mathbf{U}(F)$ et que par hypothèse $\alpha_F(\mathbf{U}(F))$ est constructible dans $\mathbf{X}(F)$, on obtient que $\alpha_F(\mathbf{Y}(F))$ est constructible dans $\mathbf{X}(F)$.

(2) Soit $\alpha:\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ un morphisme dominant de variétés algébriques affines irréductibles. Le comorphisme $\alpha^\sharp:\overline{F}[\mathbf{X}]\to\overline{F}[\mathbf{Y}]$ induit par passage aux quotients un morphisme injectif de corps $\overline{F}(\mathbf{X})\hookrightarrow\overline{F}(\mathbf{Y})$, qui fait de $\overline{F}(\mathbf{Y})$ une extension de $\overline{F}(\mathbf{X})$, et α est séparable si et seulement si cette extension est séparable. Pour $x\in\alpha(\mathbf{Y})$, la fibre $\alpha^{-1}(x)$ est une sous–variété fermée de $\mathbf{Y}$ — même si $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ et α sont définis sur F et si x appartient à $\mathbf{X}(F)$, cette sous–variété n'est en général pas définie sur F — et si $\mathbf{Z}$ est une composante irréductible de $\alpha^{-1}(x)$, on a l'inégalité [**Bor**, ch. AG, theo. 10.1]

$$\dim\mathbf{Z}\geq\dim\mathbf{Y}-\dim\mathbf{X}.$$

De plus (loc. cit.) il existe un ouvert non vide $\mathbf{U}$ de $\mathbf{X}$ contenu dans $\alpha(\mathbf{Y})$ tel que si x appartient à $\mathbf{U}$, alors pour toute composante irréductible $\mathbf{Z}$ de $\alpha^{-1}(x)$, l'inégalité ci–dessus est une égalité.

(3) La démonstration du théorème donnée dans [**BZ**, Appendix] consiste à remplacer le F–morphisme $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ par un morphisme séparable, après s'être ramené — grâce aux points (1) et (2) — au cas particulier $(*)$ suivant :
   - les variétés algébriques $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{X}$ sont affines, irréductibles et lisses ;
   - $\overline{\alpha(\mathbf{Y})} = \mathbf{X}$, i.e. le morphisme α est dominant ;
   - toutes les composantes irréductibles de toutes les fibres $\alpha^{-1}(\alpha(y))$ ont même dimension. ■

Exemple. — Continuons avec l'exemple de C.3. D'après le théorème, le graphe $\mathcal{G}^X_{\alpha_F}$ de α_F est constructible dans $X \times X$, i.e. l'action α_F est constructible. En particulier, toutes les H–orbites dans X sont localement fermées. ■

Corollaire. — *Soit $\alpha : \mathbf{H} \to \mathbf{G}$ un F–morphisme de groupes algébriques définis sur F. L'image $\alpha_F(\mathbf{H}(F))$ est un sous–groupe localement fermé de $\mathbf{G}(F)$.*

Démonstration. — Le F–morphisme α munit $\mathbf{G}$ d'une action algébrique de $\mathbf{H}$ définie sur F, et l'image $\alpha_F(\mathbf{H}(F))$ n'est autre que la $\mathbf{H}(F)$–orbite de l'élément neutre de $\mathbf{G}(F)$ pour cette action. D'où le corollaire. □

C.5. Quelques cas particuliers utiles. — Le cas particulier suivant [**BZ**, lemma A.3] du théorème de C.4 est aussi un outil essentiel à sa démonstration :

Lemme 1. — *Soit $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un F–morphisme de variétés algébriques affines lisses définies sur F, tel que pour tout $y \in \mathbf{Y}$ la différentielle* $\mathrm{d}(\alpha)_y : \mathrm{T}(\mathbf{Y})_y \to \mathrm{T}(\mathbf{X})_{\alpha(y)}$ *est surjective (i.e. tel que α est lisse de dimension relative* $\dim(\mathbf{Y}) - \dim(\mathbf{X})$*). L'application $\alpha_F : \mathbf{Y}(F) \to \mathbf{X}(F)$ est ouverte.*

On a aussi (cf. [**MB2**, remark 1.3.1]) :

Lemme 2. — *Soit $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un F–morphisme* propre *de variétés algébriques définies sur F. Alors l'application $\alpha_F : \mathbf{Y}(F) \to \mathbf{X}(F)$ est propre (donc fermée).*

Remarques. — Soit $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un F–morphisme de variétés algébriques définies sur F. On a aussi les variantes suivantes des lemmes 1 et 2. Elles sont valables pour tout corps valué hensélien F tel que le complété $\widehat{F}$ de F est une extension séparable de F [**MB1, MB2**] :

(1) Si le morphisme α est *étale*, alors l'application α_F est un homéomorphisme local.

(2) Si le morphisme α est *lisse*, alors l'application α_F est ouverte.

(3) Si le morphisme α est *fini*, alors l'application α_F est fermée.

(4) Si le morphisme α est *propre*, alors l'image $\alpha_F(\mathbf{Y}(F))$ est fermée dans $\mathbf{X}(F)$.

Le point (1) est une simple version du *théorème des fonctions implicites*. Le point (2) est une généralisation du lemme 1 (les variétés $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ n'étant plus supposées ni affines ni lisses) et résulte du fait que α_F admet des *sections locales* en chaque point de $\mathbf{Y}(F)$. Le point (3) est une conséquence de la propriété de *continuité des racines* d'une expression polynomiale. Le point (4) est une conséquence du *principe de Hasse infinitésimal* (cf. [**MB2**, cor. 1.2.2]). Notons que si le morphisme α est propre mais n'est pas fini, et bien sûr si le corps F n'est pas localement compact, alors l'application α_F n'est en général pas fermée. ■

Exemples. — Reprenons l'exemple de C.3, et supposons de plus que la variété $\mathbf{X}$ est un $\mathbf{H}$–espace homogène, c'est–à–dire que le F–morphisme $\gamma : \mathbf{H} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ est surjectif.

(1) Puisque la $\overline{F}$–algèbre $\overline{F}[t,t^{-1}]$ est un $\overline{F}[t^2,t^{-2}]$–module de type fini, le morphisme $\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_m$, $t \mapsto t^2$ est fini (et purement inséparable si $p=2$). En particulier, $(F^\times)^2 = \alpha_F(F^\times)$ est un sous–groupe fermé de $F^\times$ — ce que l'on savait déjà ! Ainsi dans l'exemple (3) de 4.9, toutes les $\mathbf{H}(F)$–orbites dans $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\delta)(F)$ sont fermées.

(2) L'exemple suivant est donné dans [**GGMB**, 6.1]. Supposons $p>1$, et prenons pour $\mathbf{H}$ le groupe algébrique affine $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ opérant sur $\mathbf{X} = \mathbb{A}^1$ via le morphisme

$$\alpha : \mathbf{H} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X},\ ((a,b),x) \mapsto a^p + b^p x.$$

Pour $x \in \mathbf{X}(F) = F$, la $\mathbf{H}(F)$–orbite de x est $\mathbf{H}(F)\cdot x = F^p + (F^\times)^p x$, par suite toute $\mathbf{H}(F)$–orbite dans F contient 0 dans sa fermeture. On a donc deux cas possibles : ou bien $x \in F^p$, auquel cas $\mathbf{H}(F)\cdot x = F^p$ est fermé dans F ; ou bien $x \notin F^p$, auquel cas $\mathbf{H}(F)\cdot x$ n'est pas fermé dans F. ■

C.6. Un critère local de séparabilité (rappels). — Rappelons qu'un morphisme dominant de variétés algébriques affines irréductibles $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ est dit *séparable* si $\overline{F}(\mathbf{Y})$ est une extension séparable de $\overline{F}(\mathbf{X})$. Plus généralement, un morphisme de variétés affines $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ tel que $\mathbf{Y}$ est irréductible, est dit séparable si $\overline{F}(\mathbf{Y})$ est une extension séparable de $\overline{F}(\overline{\alpha(\mathbf{Y})})$; où $\overline{\alpha(\mathbf{Y})}$ désigne la fermeture de Zariski de l'image $\alpha(\mathbf{Y})$ dans $\mathbf{X}$.

Comme pour les morphismes orbites $\pi_v : \mathbf{H} \to \mathbf{H}\cdot v$ (cf. 3.1), on a un critère local de séparabilité pour tout morphisme de variétés algébriques $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$. Pour $x \in \mathbf{X}$, on note :
– $\mathfrak{o}_x = \mathfrak{o}_{\mathbf{X},x}$ l'anneau local de $\mathbf{X}$ en x ;
– $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_{\mathbf{X},x}$ l'ideal maximal de $\mathfrak{o}_x$;
– $\kappa(x) = \kappa_{\mathbf{X}}(x)$ le corps résiduel $\mathfrak{o}_x/\mathfrak{p}_x$ (il est isomorphe à $\overline{F}$).

Pour $y \in \mathbf{Y}$ et $x = \alpha(y)$, on note :
– $\alpha_y^\sharp : \mathfrak{o}_x \to \mathfrak{o}_y$ le comorphisme de α en y ;
– $\mathbf{Y}_x = \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \operatorname{Spec}\kappa(x)$ la fibre géométrique de α en x — un $\kappa(x)$–schéma ;
– $\mathfrak{o}_{\alpha,y} = \mathfrak{o}_y/\alpha_y^\sharp(\mathfrak{p}_x)\mathfrak{o}_y$ l'anneau local de $\mathbf{Y}_x$ en y ;
– $\mathfrak{p}_{\alpha,y}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_{\alpha,y}$;
– $\kappa_\alpha(y)$ le corps résiduel $\mathfrak{o}_{\alpha,y}/\mathfrak{p}_{\alpha,y}$.

L'espace topologique sous–jacent à $\mathbf{Y}_x$ est homéomorphe à $\alpha^{-1}(x)$, mais le $\kappa(x)$–schéma $\mathbf{Y}_x$ n'est en général pas réduit. On dit que α *est séparable en* y si l'anneau local $\mathfrak{o}_{\alpha,y}$ est *régulier* [**Bor**, ch. AG, 3.9], c'est–à–dire si la dimension du $\kappa_\alpha(y)$–espace vectoriel $\mathfrak{p}_{\alpha,y}/\mathfrak{p}_{\alpha,y}^2$ est égale à la dimension de Krull de $\mathfrak{o}_{\alpha,y}$, notée $\dim(\mathfrak{o}_{\alpha,y})$. Soit

$$\mathrm{T}(\mathbf{Y}_x)_y = \operatorname{Hom}_{\kappa_\alpha(x)}(\mathfrak{p}_{\alpha,y}/\mathfrak{p}_{\alpha,y}^2, \kappa_\alpha(x))$$

l'espace tangent de Zariski de $\mathbf{Y}_x$ en y. On a l'inégalité (loc. cit.)

$$\dim(\mathfrak{o}_{\alpha,y}) \le \dim_{\kappa_\alpha(y)}(\mathrm{T}(\mathbf{Y}_x)_y)$$

avec égalité si et seulement si α est séparable en y.

Remarques. — Soit $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un morphisme de variétés algébriques.

(1) Pour $y \in \mathbf{Y}$ et $x = \alpha(x)$, l'anneau local $\mathfrak{o}_{\alpha^{-1}(x),y}$ de la fibre $\alpha^{-1}(x)$ en y est isomorphe au quotient $\mathfrak{o}_{\alpha,y,\mathrm{red}}$ de $\mathfrak{o}_{\alpha,y}$ par l'idéal formé par les éléments nilpotents. Les anneaux locaux $\mathfrak{o}_{\alpha,y,\mathrm{red}}$ sont réduits (par définition), et pour $x \in \alpha(\mathbf{Y})$, les $y \in \alpha^{-1}(x)$ tels que $\mathfrak{o}_{\alpha,y,\mathrm{red}}$ est régulier forment un ouvert dense de $\alpha^{-1}(x)$ [**Bor**, ch. AG, cor. 17.2]. En particulier, la fibre $\alpha^{-1}(x)$ est une variété lisse si et seulement si *tous* les anneaux locaux réduits $\mathfrak{o}_{\alpha,y,\mathrm{red}}$ ($y \in \alpha^{-1}(x)$) sont réguliers. La dimension de Krull de $\mathfrak{o}_{\alpha,y}$ coïncide (par définition) avec la dimension de Krull de $\mathfrak{o}_{\alpha,y,\mathrm{red}}$, et aussi avec $\dim_y(\alpha^{-1}(x))$; où $\dim_y(\alpha^{-1}(x))$ désigne l'inf des $\dim(\mathbf{U}')$ pour $\mathbf{U}'$ parcourant les ouverts de $\alpha^{-1}(x)$

contenant y, c'est–à–dire l'inf des $\dim(\mathbf{Z})$ pour $\mathbf{Z}$ parcourant les composantes irréductibles de $\alpha^{-1}(x)$ contenant y.

(2) Si de plus $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{X}$ sont affines et irréductibles, et si $\overline{\alpha(\mathbf{Y})} = \mathbf{X}$, alors d'après [**Bor**, ch. AG, theo. 10.1] on a l'inégalité

$$\dim(\mathfrak{o}_{\alpha,y}) \geq \dim \mathbf{Y} - \dim \mathbf{X} \quad (y \in \mathbf{Y}),$$

et il existe un ouvert non vide $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{U}$ et tout $y \in \alpha^{-1}(x)$, l'inégalité ci–dessus est une égalité (cf. la reamrque (2) de C.4). ■

On a le critère local de séparabilité suivant [**BZ**, lemma A.9] :

Lemme 1. — *Soit* $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *un morphisme de variétés algébriques, et soit* y *un point lisse de* $\mathbf{Y}$ *tel que* $x = \alpha(y)$ *est un point lisse de* $\mathbf{X}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
– *la différentielle* $\mathrm{d}(\alpha)_y : \mathrm{T}(\mathbf{Y})_y \to \mathrm{T}(\mathbf{X})_x$ *de* α *en* y *est surjective ;*
– α *est séparable en* y *et on a l'égalité entre dimensions de Krull*

$$\dim \mathfrak{o}_{\alpha,y} = \dim \mathfrak{o}_{\mathbf{Y},y} - \dim \mathfrak{o}_{\mathbf{X},x}.$$

Si $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ vérifie les hypothèses du cas $(*)$ de la remarque (3) de C.4, alors d'après le lemme 1 et la remarque (2) ci–dessus, pour tout $y \in \mathbf{Y}$, le morphisme α est séparable en y si et seulement si la différentielle $\mathrm{d}(\alpha)_y : \mathrm{T}(\mathbf{Y})_y \to \mathrm{T}(\mathbf{X})_x$ de α en y est surjective. D'après [**Bor**, ch. AG, theo. 17.3], on en déduit le

Lemme 2. — *Soit* $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *un morphisme de variétés algébriques vérifiant les hypothèses du cas* $(*)$ *de la remarque (3) de C.4. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
– *le morphisme* α *est séparable, i.e.* $\overline{F}(\mathbf{Y})$ *est une extension séparable de* $\overline{F}(\mathbf{X})$ *;*
– *il existe un point* $y \in \mathbf{Y}$ *tel que* α *est séparable en* y *;*
– *il existe un ouvert non vide* $\mathbf{U} \subset \mathbf{Y}$ *tel que* α *est séparable en tout point de* $\mathbf{U}$.

C.7. Produit fibré (rappels). — Si $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ et $\beta : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ sont deux morphismes de variétés algébriques affines, le produit fibré $\mathfrak{Y}' = \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}'$ est par définition le $\overline{F}$–schéma affine correspondant à la $\overline{F}$–algèbre $\overline{F}[\mathbf{Y}] \otimes_{\overline{F}[\mathbf{X}]} \overline{F}[\mathbf{X}']$, muni des morphismes de $\overline{F}$–schémas $p_1 : \mathfrak{Y}' \to \mathbf{Y}$ et $p_2 : \mathfrak{Y}' \to \mathbf{X}'$ correspondant aux injections naturelles $\overline{F}[\mathbf{Y}] \hookrightarrow \overline{F}[\mathfrak{Y}']$ et $\overline{F}[\mathbf{X}'] \hookrightarrow \overline{F}[\mathfrak{Y}']$. Son espace topologique sous–jacent est

$$\{(y,x') \in \mathbf{Y} \times \mathbf{X}' : \alpha(y) = \beta(x')\}.$$

Notons que $\mathfrak{Y}'$ est un sous–schéma fermé de $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}'$, mais n'est en général pas une variété car son algèbre affine $\overline{F}[\mathfrak{Y}'] = \overline{F}[\mathbf{Y}] \otimes_{\overline{F}[\mathbf{X}]} \overline{F}[\mathbf{X}']$ peut avoir des éléments nilpotents. Pour $y' = (y,x') \in \mathfrak{Y}'$, les anneaux locaux $\mathfrak{o}_{p_2,y'}$ et $\mathfrak{o}_{\alpha,y}$ sont naturellement isomorphes. Si α et β sont des F–morphismes de variétés algébriques définies sur F, alors $\mathfrak{Y}'$ est un F-schéma et les projections p_1 et p_2 sont des morphismes de F–schémas.

À l'inclusion $\mathfrak{Y}' \subset \mathbf{Y} \times \mathbf{X}'$ correspond un sous–$\overline{F}$–schéma fermé réduit $\mathbf{Y}' = \mathfrak{Y}'_{\mathrm{red}}$ de $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}'$ d'algèbre affine le quotient $\overline{F}[\mathfrak{Y}']_{\mathrm{red}}$ de $\overline{F}[\mathfrak{Y}']$ par l'idéal formé par les éléments nilpotents, qui lui « est » une variété algébrique [**Bor**, ch. AG, 6.2 et 6.3]. Le morphisme $\pi : \mathbf{Y}' \to \mathfrak{Y}'$ correspondant à la projection canonique $\overline{F}[\mathfrak{Y}'] \to \overline{F}[\mathfrak{Y}']_{\mathrm{red}}$ est un homéomorphisme sur les espaces topologiques sous–jacents. Notons $\alpha' : \mathbf{Y}' \to \mathbf{X}'$ le morphisme de variétés algébriques $p_2 \circ \pi$. Pour $y' = (y,x') \in \mathbf{Y}'$, le morphisme $p_1 \circ \pi : \mathbf{Y}' \to \mathbf{Y}$ induit un homéomorphisme sur les fibres

$$\alpha'^{-1}(x') \xrightarrow{\sim} \alpha^{-1}(\beta(x')).$$

Supposons que α et β sont des F–morphismes de variétés algébriques affines définies sur F. Alors $\mathfrak{Y}'$ et $\mathbf{Y}'$ sont des F–schémas et $\pi : \mathbf{Y}' \to \mathfrak{Y}'$ est un morphisme de F–schémas. De plus le F–schéma $\mathbf{Y}'$, identifié à une partie F–fermée de $\mathbf{Y}\times\mathbf{X}'$, « est » une variété algébrique définie sur $F^{p^{-\infty}}$, et $p_1\circ\pi:\mathbf{Y}'\to\mathbf{Y}$ et $p_2\circ\pi:\mathbf{Y}'\to\mathbf{X}'$ sont des $F^{p^{-\infty}}$–morphismes de variétés algébriques définies sur $F^{p^{-\infty}}$.

C.8. Restriction à la Weil et morphisme de Frobenius (rappels). — Soit $\mathbf{X}$ une variété algébrique affine définie sur une extension finie L de F. On note $\mathbf{X}'=\mathrm{Res}_{L/F}(\mathbf{X})$ la variété algébrique affine définie sur F, obtenue par restriction des scalaires de L à F. Concrêtement, écrivons

$$\mathbf{X}=\mathrm{Spec}\,\overline{F}[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m),\quad f_k\in L[x_1,\dots,x_n],$$

et choisissons une base $e_1,\dots,e_d$ de L sur F. Pour $k=1,\dots,m$, on pose

$$\mathbf{X}'=\mathrm{Spec}\,\overline{F}[(x'_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,d}]/(f'_{k,j}:k=1,\dots,m;j=1,\dots,d)$$

où les $f'_{k,j}\in F[(x'_{i,j})]$ sont donnés par

$$(f'_{k,1}e_1+\cdots+f'_{k,d}e_d)((x'_{i,j}))=f_k(x_1,\dots,x_n),\quad x_i=x'_{i,1}e_1+\cdots+x'_{i,d}e_d.$$

Le morphisme $\pi_{L/F,\mathbf{X}}:\mathbf{X}'\to\mathbf{X}$ qui à $(x'_{i,j})$ associe $(x_1,\dots,x_n)$ comme ci-dessus, est défini sur L, et il induit un homéomorphisme $\mathbf{X}'(F)\to\mathbf{X}(L)$, où l'on munit $\mathbf{X}'(F)$ de la topologie définie par F et $\mathbf{X}(L)$ de la topologie définie par L. Si $\mathbf{X}$ est irréductible (resp. lisse), alors $\mathbf{X}'$ est irréductible (resp. lisse). D'autre part le foncteur $\mathbf{X}\mapsto\mathbf{X}'$ commute au produit : si $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ sont deux variétés algébriques affines définies sur L, la variété $\mathrm{Res}_{L/F}(\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2)$ est F–isomorphe à $\mathbf{X}'_1\times\mathbf{X}'_2$, où l'on a posé $\mathbf{X}'_i=\mathrm{Res}_{L/F}(\mathbf{X}_i)$, $i=1,2$. On en déduit en particulier que si $\mathbf{X}$ est un groupe algébrique, alors $\mathbf{X}'$ est un groupe algébrique, et $\pi_{L/K,\mathbf{X}}$ est un morphisme de groupes algébriques.

Supposons $p>1$, et soit $q=p^s$ pour un entier $s\geq 1$. Posons $L=F^{1/q}$. C'est une extension finie de F, purement inséparable de degré q. Si $\mathbf{X}$ est une variété algébrique affine définie sur F, on note ${}^q\mathbf{X}$ la variété algébrique affine définie sur L, obtenue en appliquant le morphisme $x\mapsto x^q$ sur les coordonnées. Précisément, on écrit

$$\mathbf{X}=\mathrm{Spec}\,\overline{F}[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m),\quad f_k\in F[x_1,\dots,x_n]$$

et l'on pose

$${}^q\mathbf{X}=\mathrm{Spec}\,\overline{F}[y_1,\dots,y_n]/(h_1,\dots,h_m),$$

où les $h_k\in L[x_1,\dots,x_n]$ sont donnés par

$$f_k(x_1,\dots,x_n)=h_k(y_1,\dots,y_n)^q,\quad x_i=y_i^q.$$

Le morphisme $\pi_{q,\mathbf{X}}:{}^q\mathbf{X}\to\mathbf{X}$ qui à $(y_1,\dots,y_n)$ associe $(y_1^q,\dots,y_n^q)$ est défini sur L, et il induit un homéomorphisme ${}^q\mathbf{X}(L)\to\mathbf{X}(F)$, où l'on munit ${}^q\mathbf{X}(L)$ de la topologie définie par L et $\mathbf{X}(F)$ de la topologie définie par F. Si $\mathbf{X}$ est irréductible (resp. lisse), alors ${}^q\mathbf{X}$ est irréductible (resp. lisse), et comme pour le foncteur restriction à la Weil, le foncteur $\mathbf{X}\mapsto{}^q\mathbf{X}$ commute au produit. En particulier si $\mathbf{X}$ est un groupe algébrique, alors ${}^q\mathbf{X}$ est un groupe algébrique, et $\pi_{q,\mathbf{X}}$ est un morphisme de groupes algébriques.

Continuons avec les hypothèses du paragraphe précédent ($p>1$, $L=F^{1/q}$), et appliquons le foncteur $\mathrm{Res}_{L/F}$ à la variété ${}^q\mathbf{X}$. On obtient une variété algébrique $\mathbf{X}_q=\mathrm{Res}_{L/F}({}^q\mathbf{X})$ définie sur F, munie d'un morphisme

$$\beta_{\mathbf{X},q}=\pi_{L/F,{}^q\mathbf{X}}\circ\pi_{q,\mathbf{X}}:\mathbf{X}_q\to\mathbf{X}$$

lui aussi est défini sur F. En effet, choisissons une base $\eta_1,\dots,\eta_q$ de F sur F^q, et posons $e_i=\eta_i^{1/q}$. Alors $e_1,\dots,e_q$ est une base de $L=F^{1/q}$ sur F, et comme plus haut on pose

$$\mathbf{X}_q=\mathrm{Spec}\,\overline{F}[(y'_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,q}]/(h'_{k,j}:k=1,\dots,m;j=1,\dots,q),$$

où les $h'_{i,j} \in F[(y'_{i,j})]$ sont donnés par

$$(h'_{k,1}e_1 + \cdots + h'_{k,q}e_q)((y'_{i,j})) = h_k(y_1, \ldots, y_n), \quad y_i = y'_{i,1}e_1 + \cdots + y'_{i,q}e_q.$$

Alors $\beta = \beta_{\mathbf{X},q}$ est donné par

$$\beta((y'_{i,j})) = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i = y'^{q}_{i,1}\eta_1 + \cdots + y'^{q}_{i,q}\eta_q,$$

et d'après ce qui précède, $\beta_F : \mathbf{X}_q(F) \to \mathbf{X}(F)$ est un homéomorphisme. D'ailleurs pour toute sous–extension E/F de F^{sep}/F, puisque $E^q = E \otimes_F F^q$, l'application $\beta_E : \mathbf{X}_q(E) \to \mathbf{X}(E)$ induite par β sur les points E–rationnels, est un homéomorphisme ; où l'on munit $\mathbf{X}_q(E)$ et $\mathbf{X}(E)$ de la topologie définie par E.

C.9. Le lemme clé. — Le lemme suivant est une simple variante de [**BZ**, lemma A.13], implicitement démontrée dans [**BZ**, A.14]. On reprend ici les arguments de loc. cit.

Lemme. — *Soit $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un F–morphisme de variétés algébriques affines définies sur F, tel que $\mathbf{Y}$ est irréductible. Il existe un F–ouvert non vide $\mathbf{U}$ de $\mathbf{Y}$, une variété algébrique affine $\mathbf{X}'$ définie sur F, et un F–morphisme de variétés algébriques $\beta : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ tels que, notant $\mathbf{U}' = (\mathbf{U} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}')_{\mathrm{red}}$ le sous–F–schéma fermé réduit de $\mathbf{U} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}'$ correspondant à l'inclusion de $\mathbf{U} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}'$ dans $\mathbf{U} \times \mathbf{X}'$ (cf. C.7) et $\eta' : \mathbf{U}' \to \mathbf{X}'$ la projection sur le second facteur, on a :*

(1) *$\beta_F : \mathbf{X}'(F) \to \mathbf{X}(F)$ est un homéomorphisme ;*

(2) *η' est séparable en tout point de $\mathbf{U}'$.*

Plus précisément : si α est séparable (e.g. si $p = 1$) on peut prendre $\mathbf{X}' = \mathbf{X}$ et $\beta = \mathrm{id}_{\mathbf{X}}$, et si α n'est pas séparable (auquel cas $p > 1$) on peut prendre $\mathbf{X}' = \mathbf{X}_q$ et $\beta = \beta_{\mathbf{X},q}$ pour un entier $q = p^s$ ($s \geq 1$) suffisamment grand.

Démonstration. — Commençons par le cas le plus simple : supposons que le F–morphisme $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ est séparable. Alors d'après C.6, il existe un ouvert non vide $\mathbf{U}$ de $\mathbf{Y}$ tel que α est séparable en tout point de $\mathbf{U}$. Quitte à remplacer l'ouvert $\mathbf{U}$ par l'union de ses translatés sous Σ, on peut le supposer Σ–stable. Alors $\mathbf{U}$ est F–ouvert et le lemme est démontré. En particulier si $p = 1$, le lemme est démontré.

Passons au cas général. Supposons $p > 1$. Notons L le corps des fractions de l'anneau $\alpha^\sharp(\overline{F}[\mathbf{X}]) \subset \overline{F}[\mathbf{Y}]$. C'est un sous–corps du corps $\overline{F}(\mathbf{Y})$ des fonctions rationnelles sur $\mathbf{Y}$ [19]. D'après [**BZ**, lemma A.14], il existe un entier $q = p^s$ ($s \geq 1$) tel que $K = (\overline{F}(\mathbf{Y}) \otimes_L L^{1/q})_{\mathrm{red}}$ est une extension *séparable* de $L^{1/q}$; où $(\overline{F}(\mathbf{Y}) \otimes_L L^{1/q})_{\mathrm{red}}$ désigne le quotient de l'anneau $\overline{F}(\mathbf{Y}) \otimes_L L^{1/q}$ par l'idéal formé par les éléments nilpotents. À cette extension correspond un morphisme séparable de variétés algébriques affines irréductibles $\alpha'' : \mathbf{Y}'' \to \mathbf{X}''$ défini comme suit. On pose $\mathbf{X}'' = {}^q\mathbf{X}$, $\pi = \pi_{q,\mathbf{X}} : \mathbf{X}'' \to \mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}'' = (\mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}'')_{\mathrm{red}}$, et l'on note $\alpha'' : \mathbf{Y}'' \to \mathbf{X}''$ le morphisme de variétés algébriques donné par la projection sur le second facteur. Les variétés $\mathbf{X}''$ et $\mathbf{Y}''$ ainsi que le morphisme α'' sont définis sur $F^{p^{-\infty}}$, et par construction α'' est séparable. D'après C.6, il existe un ouvert $\mathbf{V}''$ de $\mathbf{Y}''$, que l'on peut supposer défini sur $F^{p^{-\infty}}$ (c'est–à–dire $F^{p^{-\infty}}$–ouvert), tel que α'' est séparable en tout point de $\mathbf{V}''$. Comme $\pi : \mathbf{X}'' \to \mathbf{X}$ est un homéomorphisme pour la $F^{p^{-\infty}}$–topologie, la projection sur le premier facteur $\delta : \mathbf{Y}'' \to \mathbf{Y}$ est aussi un homéomorphisme pour la $F^{p^{-\infty}}$–topologie.

19. Rappelons qu'on n'impose pas aux morphismes séparables d'être dominants : la fermeture de Zariski $\mathbf{X}_1 = \overline{\alpha(\mathbf{Y})}$ de l'image $\alpha(\mathbf{Y})$ dans $\mathbf{X}$ est une sous–variété fermée irréductible de $\mathbf{X}$ définie sur F, et L est isomorphe au corps $\overline{F}(\mathbf{X}_1)$ des fonctions rationnelles sur $\mathbf{X}_1$.

Par suite $\mathbf{U} = \delta(\mathbf{V}'')$ est $F^{p^{-\infty}}$–ouvert, et donc F–ouvert [**Bor**, ch. AG, 12.1], dans $\mathbf{Y}$. Par construction, le morphisme de variétés donné par la projection sur le second facteur

$$\eta'' : \mathbf{U}'' = (\mathbf{U} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}'')_{\mathrm{red}} \to \mathbf{X}''$$

est séparable en tout point de $\mathbf{U}''$. Pour que la condition (1) soit vérifiée, il suffit de remplacer $\mathbf{X}''$ par $\mathbf{X}' = \mathbf{X}_q$ ($= \mathrm{Res}_{F^{1/q}/F}(\mathbf{X}'')$), et π par $\beta = \rho \circ \pi$, où $\rho = \pi_{F^{1/q}/F,\mathbf{X}''} : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}''$. D'après C.8, l'application $\beta_F : \mathbf{X}'(F) \to \mathbf{X}(F)$ est un homéomorphisme. Notons

$$\eta' : \mathbf{U}' = (\mathbf{U} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}')_{\mathrm{red}} \to \mathbf{X}'$$

le morphisme de variétés donné par la projection sur le second facteur. Puisque le morphisme ρ est séparable (pour la définition de $\pi_{F^{1/q}/F,\mathbf{X}''}$, cf. C.8), le $\overline{F}$–schéma $\mathbf{U}'' \times_{\mathbf{X}''} \mathbf{X}'$ est réduit. Il est donc isomorphe à $\mathbf{U}'$, et pour $y' = (u, x') \in \mathbf{U} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}'$ et $y'' = (u, \rho(x')) \in \mathbf{U} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}''$, les anneaux locaux $\mathfrak{o}_{\alpha',y'}$ et $\mathfrak{o}_{\alpha'',y''}$ sont isomorphes. Par conséquent η' est séparable en tout point de $\mathbf{U}'$, et le lemme est démontré. □

Remarque 1. — D'après la démonstration du lemme, on peut choisir le $F^{p^{-\infty}}$–ouvert $\mathbf{V}''$ de $\mathbf{Y}''$ tel que (en fait il est implicitement choisi ainsi) :
– $\mathbf{V}''$ est lisse ;
– $\alpha''(\mathbf{V}'')$ est contenu dans l'ouvert dense de $\overline{\alpha''(\mathbf{Y}'')}$ formé des points simples ;
– les anneaux locaux $\mathfrak{o}_{\alpha'',y''}$ pour $y'' \in \mathbf{V}''$ ont tous la même dimension.

En ce cas $\mathbf{U}'$ est lisse et les anneaux locaux $\mathfrak{o}_{\alpha',y'}$ pour $y' \in \mathbf{U}''$ ont tous la même dimension. Si de plus on suppose que $\mathbf{X}$ est lisse et que α est dominant (ce qui implique que $\mathbf{X}$ est irréductible), alors le morphisme $\eta' : \mathbf{U}' \to \mathbf{X}'$ vérifie les conditions du cas $(*)$. ■

Remarque 2. — La variété $\mathbf{U}'$ n'est en général pas définie sur F, mais seulement sur une extension finie purement inséparable F' de F. De plus, puisque α' est un morphisme de F–schémas, c'est un F'–morphisme de variétés algébriques définies sur F'. Comme dans [**BZ**, A.13] on peut remplacer $\mathbf{U}'$ par une variété $\mathbf{Z}$ définie sur F : l'ensemble

$$\mathbf{U}'(F) = \mathbf{U}' \cap (\mathbf{Y} \times \mathbf{X}')(F)$$

est égal à

$$\{(y, x') \in \mathbf{U}(F) \times \mathbf{X}'(F) : \alpha_F(u) = \beta_F(x')\},$$

et puisque $\beta_F : \mathbf{X}'(F) \to \mathbf{X}(F)$ est un homéomorphisme, $\mathbf{U}'(F)$ est homéomorphe à $\mathbf{U}(F)$, et β_F induit un homéomorphisme de $\alpha'(\mathbf{U}'(F))$ sur $\alpha_F(\mathbf{U}(F))$. Soit $\mathbf{Z} = \overline{\mathbf{U}'(F)}$ la fermeture de $\mathbf{U}'(F)$ dans $\mathbf{U} \times \mathbf{X}'$ pour la topologie de Zariski. C'est une sous–variété fermée de $\mathbf{U} \times \mathbf{X}'$, contenue dans $\mathbf{U}'$ et définie sur F (C.3). On a $\mathbf{U}'(F) = \mathbf{Z}(F)$, et α' induit un F–morphisme $\alpha_{\mathbf{Z}} : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}'$ de variétés algébriques définies sur F, qui est séparable en tout point y' de $\mathbf{Z}$ tel que $\dim \mathfrak{o}_{\alpha_{\mathbf{Z}},y'} = \dim \mathfrak{o}_{\alpha',y'}$. En effet, pour $y' \in \mathbf{Z}$, l'anneau local $\mathfrak{o}_{\alpha_{\mathbf{Z}},y'}$ est un quotient de $\mathfrak{o}_{\alpha',y'}$, et puisque $\mathfrak{o}_{\alpha',y'}$ est régulier, on a

$$\dim \mathfrak{o}_{\alpha_{\mathbf{Z}},y'} \leq \dim \mathfrak{o}_{\alpha',y'}$$

avec égalité si et seulement si $\mathfrak{o}_{\alpha_{\mathbf{Z}},y'} = \mathfrak{o}_{\alpha',y'}$. En particulier, si le morphisme $\alpha|_{\mathbf{U}}$ est *quasi–fini*, i.e. si pour tout $y \in \mathbf{U}$ la fibre $\alpha^{-1}(\alpha(y))$ est finie, alors le morphisme α' est quasi–fini, et le morphisme $\alpha_{\mathbf{Z}}$ (lui aussi quasi–fini) est séparable en tout point de $\mathbf{Z}$. ■

C.10. Un résultat bien connu. — Le lemme suivant, bien connu des spécialistes, est valable pour n'importe quel corps commutatif algébriquement clos $\overline{F}$.

Rappelons [**Bor**, ch. AG, theo. 10.1] que si $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ est un morphisme dominant de variétés algébriques irréductibles, on a $\dim(\mathbf{Y}) = \dim(\mathbf{X})$ si et seulement si l'ensemble des $x \in \mathbf{X}$ tels que la fibre $f^{-1}(x) \subset \mathbf{Y}$ est finie, contient un ouvert dense de $\mathbf{X}$.

Lemme. — *Soit $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un morphisme de variétés algébriques affines irréductibles. On suppose que f est dominant, et que* $\dim(\mathbf{Y}) = \dim(\mathbf{X})$. *Alors il existe un ouvert affine $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ tel que le morphisme*

$$f|_{f^{-1}(\mathbf{U})} : f^{-1}(\mathbf{U}) \to \mathbf{U}$$

est fini.

Démonstration. — Notons $A = \overline{F}[\mathbf{X}]$ et $B = \overline{F}[\mathbf{Y}]$ les algèbres affines de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, et soit $K = \overline{F}(\mathbf{X})$ et $L = \overline{F}(\mathbf{Y})$ leurs corps des fractions. Le comorphisme

$$f^\sharp : A \to B$$

est injectif, et fait de B une A–algèbre de type fini. Il induit par passage aux corps des fractions un morphisme injectif de corps $K \hookrightarrow L$, qui fait de L une extension (de type fini) de K. Commençons par montrer que cette extension est *finie*. La K–algèbre (de type fini) $K \otimes_A B$ est l'agèbre affine $K[\mathbf{Y}_\eta]$ de la *fibre générique* $\mathbf{Y}_\eta = \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \mathrm{Spec}(K)$ — un K–schéma réduit, mais pas géométriquement réduit — de f ; où η est le point générique de $\mathbf{X}$. Puisque $K \otimes_A B$ est isomorphe au localisé $S^{-1}B$, $S = f^\sharp(A) \smallsetminus \{0\}$, c'est un anneau intègre. D'après le « lemme de normalisation de Nœther », il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n$ dans $K \otimes_A B$, algébriquement indépendants sur K, faisant de $K \otimes_A B$ un $K[x_1, \ldots, x_n]$–module de type fini. Comme $n = \dim(\mathbf{Y}_\eta) = \dim(\mathbf{Y}) - \dim(\mathbf{X})$, on a $n = 0$. Par conséquent $K \otimes_A B$ est un K–espace vectoriel de dimension finie. C'est donc un corps (puisque c'est un anneau intègre), et $L = K \otimes_A B$ est une extension finie de K.

Choisissons un sous–ensemble fini $\{b_1, \ldots, b_m\} \subset B$ engendrant B sur A. D'après le paragraphe précédent, chaque b_i est algébrique sur K, i.e. $Q_i(b_i) = 0$ pour un polynôme non nul $Q_i(t) \in K[t]$. Puisque K est le corps des fractions de A, il existe un élément $a \in A$, $a \neq 0$, tel que $aQ_i(t) \in A[t]$ pour $i = 1, \ldots, m$. Posant $b = f^\sharp(a) \in B \smallsetminus \{0\}$, l'anneau $B[b^{-1}]$ est entier sur $A[a^{-1}]$. Mais comme $B[b^{-1}]$ est une $A[a^{-1}]$–algèbre de type fini, c'est un $A[a^{-1}]$–module de type fini, et le morphisme

$$f|_{\mathrm{spec}(B[b^{-1}]} : \mathrm{Spec}(B[b^{-1}]) \to \mathrm{Spec}(A[a^{-1}])$$

est fini. □

C.11. Une conséquence du lemme clé. — Soit $\mathbf{H}$ un groupe algébrique, et $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ est un morphisme de variétés algébriques. On dit que α est un $\mathbf{H}$–*morphisme* si les variétés $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{X}$ sont munies d'une action algébrique (à gauche) de $\mathbf{H}$, et si l'on a

$$\alpha(h \cdot y) = h \cdot \alpha(y) \quad (h \in \mathbf{H},\, y \in \mathbf{Y}).$$

Plus généralement, si $\beta : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ est un morphisme de groupes algébriques, on dit que α est un β–*morphisme* si la variété $\mathbf{Y}$ est muni d'une action algébrique de $\mathbf{G}$, la variété $\mathbf{X}$ est muni d'une action algébrique de $\mathbf{H}$, et si l'on a

$$\alpha(g \cdot y) = \beta(g) \cdot \alpha(y) \quad (g \in \mathbf{G},\, y \in \mathbf{Y}).$$

La proposition suivante est une conséquence da la démonstration du lemme de C.9.

Proposition. — *Soit $\mathbf{H}$ un groupe algébrique affine défini sur F, et soit $\alpha : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un F–morphisme* fini *de variétés algébriques affines définies sur F, tel que $\mathbf{Y}$ est irréductible. On suppose que les variétés $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{X}$ sont munies d'une action algébrique de $\mathbf{H}$ définie sur F, et que α est un $\mathbf{H}$–morphisme. On suppose aussi que $\mathbf{Y}$ est un $\mathbf{H}$–espace homogène. Si le morphisme α est séparable, alors il est étale. Sinon, il existe un F–morphisme $\alpha_1 : \mathbf{Y}_1 \to \mathbf{X}_1$ de variétés algébriques affines définies sur F, et des F–morphismes de variétés algébriques $\gamma : \mathbf{Y}_1 \to \mathbf{Y}$ et $\zeta : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}$, tels que :*

(1) *le morphisme α_1 est fini et étale ;*

(2) *l'application $\gamma_F : \mathbf{Y}_1(F) \to \mathbf{Y}(F)$ est un homéomorphisme ;*

(3) *l'application $\zeta_F : \mathbf{X}_1(F) \to \mathbf{X}(F)$ induit par restriction un homéomorphisme*
$$\alpha_{1,F}(\mathbf{Y}_1(F)) \to \alpha_F(\mathbf{Y}(F));$$

(4) *on a l'égalité $\alpha_F = \zeta_F \circ \alpha_{1,F} \circ \gamma_F^{-1}$.*

Démonstration. — Puisque le morphisme α est fini, il est surjectif. Par suite la variété $\mathbf{X}$ est irréductible, et c'est un $\mathbf{H}$–espace homogène. En particulier (par homogénéité), le morphisme α vérifie les hypothèses du cas $(*)$ de la remarque (3) de C.4. Notons aussi que puisque α est fini, on a $\dim(\mathbf{Y}) = \dim(\mathbf{X})$.

Soit $L \subset \overline{F}(\mathbf{Y})$ le corps des fractions de l'anneau $\alpha^\sharp(\overline{F}[\mathbf{X}])$.

Si le morphisme α est séparable, i.e. si l'extension $\overline{F}[Y]/L$ est séparable, alors d'après le lemme 2 de C.6 (par homogénéité), le morphisme α est séparable en tout point de $\mathbf{Y}$. Par suite (lemme 1 de C.6), pour tout $y \in \mathbf{Y}$, la différentielle $\mathrm{d}(\alpha)_y : \mathrm{T}(\mathbf{Y})_y \to \mathrm{T}(\mathbf{X})_{\alpha(y)}$ est surjective, donc bijective. En d'autres termes, le morphisme α est lisse de dimension relative 0. Il est donc étale.

Supposons maintenant que l'extension $\overline{F}(\mathbf{Y})/L$ n'est pas séparable (on a donc $p > 1$), et choisisssons comme dans la démonstration du lemme de C.9 un entier $q = p^s$, $s \geq 1$, tel que $K = (\overline{F}(\mathbf{Y}) \otimes_L L^{1/q})_{\mathrm{red}}$ est une extension séparable de $L^{1/q}$. Reprenons la démonstration de loc. cit., en tenant compte de l'action de $\mathbf{H}$.

Posons $\mathbf{H}'' = {}^q\mathbf{H}$ et notons $\pi_{\mathbf{H}}$ le $F^{p^{-\infty}}$–morphisme $\pi_{q,\mathbf{H}} : \mathbf{H}'' \to \mathbf{H}$ (cf. C.8). C'est un morphisme de groupes algébriques, et par fonctorialité, la variété $\mathbf{X}'' = {}^q\mathbf{X}$ est munie d'une action algébrique de $\mathbf{H}''$ définie sur $F^{p^{-\infty}}$, qui fait de $\pi = \pi_{q,\mathbf{X}} : \mathbf{X}'' \to \mathbf{X}$ un $\pi_{\mathbf{H}}$–morphisme. On en déduit une action algébrique de $\mathbf{H}''$ sur la variété $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}''$, définie sur $F^{p^{-\infty}}$: pour $h'' \in \mathbf{H}''$ et $(y, x'') \in \mathbf{Y} \times \mathbf{X}''$, on pose
$$h'' \cdot (y, x'') = (\pi_{\mathbf{H}}(h) \cdot y, h'' \cdot x'').$$
Cette action se restreint en une action algébrique sur $\mathbf{Y}'' = (\mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}'')_{\mathrm{red}}$, elle aussi définie sur $F^{p^{-\infty}}$. La projection sur le second facteur $\alpha'' : \mathbf{Y}' \to \mathbf{X}''$ est un $\mathbf{H}''$–morphisme surjectif, et la projection sur le premier facteur $\mathbf{Y}'' \to \mathbf{Y}$ est un $\pi_{\mathbf{H}}$–morphisme surjectif. Les morphismes $\pi : \mathbf{X}'' \to \mathbf{X}$ et $\pi_{\mathbf{H}} : \mathbf{H}'' \to \mathbf{H}$ sont des homéomorphismes pour la $F^{p^{-\infty}}$–topologie. On en déduit que la variété $\mathbf{X}''$ est un $\mathbf{H}''$–espace homogène, et que la variété $\mathbf{Y}''$ est elle aussi un $\mathbf{H}''$–espace homogène. Puisque $\mathbf{H}''$ est lisse, les variétés $\mathbf{X}''$ et $\mathbf{Y}''$ le sont aussi — pour $\mathbf{X}'' = {}^q\mathbf{X}$ on le savait déjà, puisque $\mathbf{X}$ est lisse —, et comme le $\mathbf{H}''$–morphisme α'' est séparable, par homogénéité il est séparable en tout point de $\mathbf{Y}''$ (i.e. on peut, dans la démonstration du lemme de C.9, prendre $\mathbf{U} = \mathbf{Y}$ et $\mathbf{U}'' = \mathbf{Y}''$). De plus α'' est un morphisme quasi–fini. Il est donc fini (par homogénéité, d'après le lemme de C.10), et lisse de dimension relative 0, donc étale.

Il faut ensuite (comme dans la démonstration du lemme de C.10)) remplacer $\mathbf{X}''$ par $\mathbf{X}' = \mathbf{X}_q$ $(= \mathrm{Res}_{F^{1/q}/F}(\mathbf{X}''))$, et π par $\beta = \rho \circ \pi$, où $\rho = \pi_{F^{1/q}/F,\mathbf{X}'} : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}''$. La variété

$\mathbf{X}'$ est définie sur F, et β est un F–morphisme qui, par passage aux point F–rationnels, donne un homéomorphisme $\beta_F : \mathbf{X}'(F) \to \mathbf{X}(F)$. Posons $\mathbf{Y}' = (\mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}')_{\mathrm{red}}$ et notons

$$\alpha' : \mathbf{Y}' \to \mathbf{X}'$$

la projection sur le second facteur. C'est un $F^{p^{-\infty}}$–morphisme surjectif. Montrons qu'il est fini et étale. Le morphisme ρ est séparable, par conséquent le $\overline{F}$–schéma $\mathbf{Y}'' \times_{\mathbf{X}''} \mathbf{X}'$ est réduit, et il est isomorphe à $\mathbf{Y}'$. Puisque le morphisme $\alpha'' : \mathbf{Y}'' \to \mathbf{X}''$ est fini, le morphisme $\alpha' \simeq \alpha'' \times_{\mathbf{X}''} \mathbf{X}'$ l'est aussi. Pour $y' = (y, x') \in \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}'$ et $y'' = (y, \rho(x')) \in \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{X}''$, les anneaux locaux $\mathfrak{o}_{y',\alpha'}$ et $\mathfrak{o}_{\alpha'',y''}$ sont isomorphes. Le morphisme α' est donc séparable en tout point de $\mathbf{Y}'$, et même lisse de dimension relative 0, donc étale [20].

Notons $\mathbf{Y}_1$ la fermeture de $\mathbf{Y}'(F) = \mathbf{Y}' \cap (\mathbf{Y} \times \mathbf{X}')(F)$ dans $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}'$ pour la topologie de Zariski. C'est une sous–variété fermée de $\mathbf{Y}'$ définie sur F telle que $\mathbf{Y}_1(F) = \mathbf{Y}'(F)$, et α' induit par restriction un F–morphisme $\alpha'_1 : \mathbf{Y}_1 \to \mathbf{X}'$ qui, d'après la remarque 2 de C.9, est séparable en tout point de $\mathbf{Y}_1$. Puisque α'_1 est le composé d'une immersion fermée $\mathbf{Y}_1 \hookrightarrow \mathbf{Y}'$ et du morphisme fini $\alpha' : \mathbf{Y}' \to \mathbf{X}'$, c'est lui–même un morphisme fini. L'image $\mathbf{X}_1 = \alpha'_1(\mathbf{Y}_1)$ est donc une sous–variété fermée de $\mathbf{X}'$ définie sur F, et le F–morphisme $\alpha_1 : \mathbf{Y}_1 \to \mathbf{X}_1$ déduit de α'_1 est surjectif, fini, et séparable en tout point de $\mathbf{Y}_1$. Il est donc lisse, et même étale.

En définitive on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Y}'(F) = \mathbf{Y}_1(F) \arrow[r, "\alpha_{1,F}"] \arrow[d] & \mathbf{X}_1(F) \arrow[r] & \mathbf{X}'(F) \arrow[d, "\beta_F"] \\ \mathbf{Y}(F) \arrow[rr, "\alpha_F"'] & & \mathbf{X}(F) \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est celle déduite par restriction de la projection sur le premier facteur $\mathbf{Y}(F) \times \mathbf{X}'(F) \to \mathbf{Y}(F)$, et la flèche horizontale du haut à droite est l'immersion fermée canonique (inclusion). On note $\gamma : \mathbf{Y}_1 \to \mathbf{Y}$ le F–morphisme déduit de la projection sur le premier facteur, et $\zeta : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}$ le F–morphisme déduit de β. Puisque

$$\mathbf{Y}'(F) = \{(y, x') \in \mathbf{Y}(F) \times \mathbf{X}'(F) : \alpha_F(y) = \beta_F(x')\}$$

et que $\beta_F : \mathbf{X}'(F) \to \mathbf{X}(F)$ est un homéomorphisme, on obtient que :

– l'application $\gamma_F : \mathbf{Y}_1(F) \to \mathbf{Y}(F)$ est un homéomorphisme ;

– l'application $\zeta_F : \mathbf{X}_1(F) \to \mathbf{X}(F)$ induit par restriction un homéomorphisme

$$\alpha_{1,F}(\mathbf{Y}_1(F)) \to \alpha_F(\mathbf{Y}(F)).$$

Cela achève la démonstration de la proposition. □

Corollaire. — *L'application (fermée)* $\alpha_F : \mathbf{Y}(F) \to \mathbf{X}(F)$ *est un homéomorphisme local sur son image* $\alpha_F(\mathbf{Y}(F))$.

Démonstration. — Les applications $\alpha_F : \mathbf{Y}(F) \to \mathbf{X}(F)$ et $\alpha_{1,F} : \mathbf{Y}_1(F) \to \mathbf{X}_1(F)$ sont fermées (lemme 2 de C.5), et l'application $\alpha_{1,F} : \mathbf{Y}_1(F) \to \mathbf{X}_1(F)$ est un homéomorphisme local (remarque (3) de C.5). D'où le corollaire. □

20. En particulier, si F'/F est une sous–extension finie de $F^{p^{-\infty}}/F$ telle que $\mathbf{Y}'$ est défini sur F', alors le morphisme α' est défini sur F', et l'application $\alpha'_{F'} : \mathbf{Y}'(F') \to \mathbf{X}'(F')$ est fermée, et c'est un homéomorphisme local.

Remarques. — (1) Si l'extension $\overline{F}[Y]/L$ est séparable, puisque le morphisme α est étale (et fini), l'application $\alpha_F : \mathbf{Y}(F) \to \mathbf{X}(F)$ est un homéomorphisme local (et elle est fermée). En particulier l'image $\alpha_F(\mathbf{Y}(F))$ est une sous–variété ϖ–adique ouverte et fermée de $\mathbf{X}(F)$.

(2) Si l'extension $\overline{F}[Y]/L$ n'est pas séparable, comme l'application

$$\alpha_F = \beta_F \circ \alpha_{1,F} \circ \gamma_F^{-1} : \mathbf{Y}(F) \to \mathbf{X}(F)$$

est un homéomorphisme local sur son image $\alpha_F(\mathbf{Y}(F))$, elle la munit d'une structure de variété ϖ–adique, mais cette dernière *n'est pas* une sous–variété ϖ–adique de $\mathbf{X}(F)$.

(3) Soit L'/L la sous–extension séparable maximale de $\overline{F}(\mathbf{Y})/L$. Si $L' \neq \overline{F}(\mathbf{Y})$, alors on peut prendre pour q le degré de l'extension (purement inséparable) $\overline{F}(\mathbf{Y})/L'$. En effet on a l'égalité $L'^{1/q} = \overline{F}(\mathbf{Y})$, d'où l'inclusion $L^{1/q} \subset \overline{F}(\mathbf{Y})$. Comme $L^{1/q}/L$ est une extension purement inséparable de degré q, on a l'égalité $\overline{F}(\mathbf{Y}) = L^{1/q}L'$; où $L^{1/q}L'$ est l'extension composée de $L^{1/q}/L$ et L'/L dans $\overline{F}/L$. Comme d'autre part $K = (\overline{F}(\mathbf{Y}) \otimes_L L^{1/q})_{\mathrm{red}}$ s'identifie à $\overline{F}(\mathbf{Y})L^{1/q} = \overline{F}(\mathbf{Y})$, l'extension $K/L^{1/q}$ est séparable (de degré $[L' : L]$). ■

Références

[A] Arthur J., *A local trace formula*, Publ. Math. IHÉS **73** (1991), pp. 5–96.

[BH1] Bushnell C., Henniart G., *Local tame lifting for $GL(n)$ I : simple characters*, Publ. Math. I.H.É.S **83** (1996), pp. 14–233.

[BH2] Bushnell C., Henniart G., *The local Langlands conjecture for $GL(2)$*, Grund. der math. Wiss. **335**, Springer–Verlag Berlin–Heidelberg, 2006.

[Bir] Birkes D., *Orbits of linear algebraic groups*, Ann. Math. **93** (1971), pp. 459–475.

[Be] Bernstein J., *Lectures on representations of p-adic groups* (1992, notes non publiées), http ://www.math.tau.ac.il/∼bernstei/.

[Bou] Bourbaki N., *Algèbre, ch. 7–9*, Hermann, Paris, 1950–58

[Bor] Borel A., *Linear algebraic group (second enlarged edition)*, Grad. Texts in Math. **126**, Springer–Verlag, New York, 1991.

[Bu] Bushnell C., *Induced representations of locally profinite groups*, J. Algebra **134** (1990), pp. 104–114.

[BT1] Bruhat F., Tits J., *Groupes réductifs sur un corps local. Chapitre I : Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.É.S **41** (1972), pp. 5–251.

[BT2] Bruhat F., Tits J., *Groupes réductifs sur un corps local. Chapitre II : Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. I.H.É.S **60** (1984), pp. 5–184.

[BT3] Bruhat F., Tits J., *Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III : compléments et applications et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. IA, Math. **37** (1987), pp. 671–698.

[BZ] Bernstein I., Zelevinski A., *Representations of the group $\mathrm{GL}_N(F)$ where F is a local non–archimedean field*, Uspechi Math. Nauk. **31** (1976), pp. 5–60.

[Ca1] Casselman R., *Introduction theory of admissible representations of p–adic reductive groups*, (1974, notes non publiées), http ://www.math.ubc.ca/∼cass/research/pdf/p-adic-book.pdf.

[Ca2] Casselman R., *Characters and Jacquet modules*, Math. Ann. **230** (1977), pp. 101–105.

[Cl1] Clozel L., *Théorème d'Atiyah–Bott pour les variétés p–adiques et caractères des groupes réductifs*, Mém. Soc. Math. France **15** (1984), pp. 39–64.

[Cl2] Clozel L., *Characters of non–connected p–adic groups*, Can. J. Math. **39** (1987), pp. 149–167.

[D] Deligne P., *Le support du caractère d'une représentation supercuspidale*, C. R. Acad. Sc. Paris **283** (1976), pp. 155–157.

[DM1] Digne F., Michel J., *Groupes réductifs non connexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **27**, n.3 (1994), pp. 345–406.

[DM2] Digne F., Michel J., *Points fixes des automorphismes quasi–semi–simples*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **332**, série I (2001), pp. 1055–1060.

[GGMB] Gabber O., Gille P., Moret–Bailly L., *Fibrés principaux sur les corps valués henséliens*, arXiv :1309.6430v1 [math.AG] 25 sept. 2013.

[HC1] Harish–Chandra, *Harmonic analysis on reductive p–adic groups (notes by van Dijk)*, Lectures Notes in Math. **162**, Springer, Berlin, 1970.

[HC2] Harish–Chandra, *Admissible distributions on reductive p–adic groups*, Queen's Papers in Pure and Applied Math. **48** (1978), pp. 281–347.

[HC3] Harish–Chandra, *A submersion principle and its application*, Proc. Ind. Acad. Sci. **90** (1981), pp. 95–102 ; *Collected Papers, IV*, Springer, Berlin, 1984, pp. 439–446.

[KS] Kottwitz R., Shelstad D., *Foundation of twisted endoscopy*, Astérisque **255** (1999).

[La] Labesse J.–P., *Stable twisted trace formula : elliptic terms*, J. Inst. Math. Jussieu **3** (2004), pp. 473–530.

[Le1] Lemaire B., *Intégrabilité locale des caractères tordus de* $\mathrm{GL}_n(D)$, J. reine angew. Math. **566** (2004), pp. 1–39.

[Le2] Lemaire B., *Intégrabilité locale des caractères de* $\mathrm{SL}_n(D)$, Pacific J. Math. **222** (2005), pp. 69–131.

[Li] Li W.–W, *On a pairing of Goldberg–Shahidi for even orthogonal groups*, Represent. Theory **17** (2013), pp 337–381.

[MB1] Moret–Bailly L., *Un théorème de l'application ouverte sur les corps valués algébriquement clos*, Math. Scand. **111** (2012), pp. 161–168.

[MB2] Moret–Bailly L., *An extension of Greenberg's theorem to general valuation rings*, Manuscripta Math. **139** (2012), pp. 153–166.

[MS] Meyer R., Solleveld M., *Characters and growth of admissible representations of reductive p-adic groups*, J. Inst. Math. Jussieu **11** (2012), pp. 289–331.

[RS] Rader C., Silberger A., *Some consequences of Harish–Chandra's submersion principle*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), pp. 1271–1279.

[Se] Serre J.–P., *Cohomologie galoisienne (cinquième édition, révisée et complétée)*, Lect. Notes Math. **5**, Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 1994, pp. 1–181.

[Sp] Springer T., *Reductive groups*, Proc. Symp. Pure Math. **33**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1979, pp. 3–27.

[St] Steinberg R., *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **80**, 1968.

[T] Tits J., *Classification of algebraic semisimple groups*, Proc. Summer Inst. on Algebraic Groups and Discontinuous Groups (Boulder, 1965), Proc. Symp. Pure Math. **9**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1966, pp. 33–62.

[V] Vignéras M.–F., *Représentations l–modulaires d'un groupe réductif p–adique avec $l \neq p$*, Progress in Math. **137**, Birkhäuser Boston, 1996.

[VD] Van Dijk G., *Computation of certain induced characters of* $\mathfrak{p}$*–adic groups*, Math. Ann. **199** (1972), pp. 229–240.

[Y] Yu J.–K., *Smooth models associated to concave functions in Bruhat–Tits theory*, preprint (2003), homepage of the author.

[W] Waldspurger J.–L., *La formule des traces locale tordue*, arXiv :1205.1100v2 [math.RT] 13 septembre 2012.

Bertrand Lemaire, Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 39 rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille, France • *E-mail :* bertrand.lemaire@univ-amu.fr